Vorlesung über Analysis I

Philipps-Universität Marburg

Sommersemester 2021

Pablo Ramacher

Inhalt

[Einleitung 3](#_Toc136814142)

[Kapitel 1: Elemente der Topologie 4](#_Toc136814143)

[1.1 Metrische Räume 4](#_Toc136814144)

[1.2 Konvergente Folgen in metrischen Räumen 12](#_Toc136814145)

[1.3 Die Zahl e 23](#_Toc136814146)

[1.4 Klassen metrischer Räume 26](#_Toc136814147)

[1.4.1 Zusammenhängende Räume 26](#_Toc136814148)

[1.4.2 Vollständige metrische Räume 30](#_Toc136814149)

[1.4.3 Kompakte metrische Räume 35](#_Toc136814150)

[1.5 Reihen 42](#_Toc136814151)

[1.5.1 Allgemeine Eigenschaften 42](#_Toc136814152)

[1.5.2 Konvergenz–Kriterien 45](#_Toc136814153)

[1.5.3 Umordnung von Reihen 50](#_Toc136814154)

[1.5.4 Das Cauchy–Produkt für Reihen 54](#_Toc136814155)

[1.5.5 Die Exponential-Funktion 57](#_Toc136814156)

[Kapitel 2: Stetige Abbildungen 62](#_Toc136814157)

[2.1 Stetigkeit in einem Punkt 62](#_Toc136814158)

[2.2 Eigenschaften stetiger Funktionen 73](#_Toc136814159)

[2.3 Folgen stetiger Funktionen 78](#_Toc136814160)

[Funktionenreihen 83](#_Toc136814161)

[2.4 Potenzreihen, trigonometrische Funktionen und die Zahl \pi 85](#_Toc136814162)

[Potenzreihen 85](#_Toc136814163)

[Trigonometrische Funktionen 87](#_Toc136814164)

[Kapitel 3: Differentialrechnung in einer Variablen 90](#_Toc136814165)

[3.1 Die Ableitung einer Funktion 90](#_Toc136814166)

[3.2 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung 96](#_Toc136814167)

[3.3 Die Taylor-Entwicklung 102](#_Toc136814168)

# Einleitung

Die Ursprünge der Analysis reichen bis in die Antike. Doch erst in der Renaissance wurden die Grundlagen der modernen Analysis in Ansätzen entwickelt (G. Galilei, 1564-1642) und im 17. Jahrhundert unabhängig voneinander von G. W. Leibniz (1646-1716) und I. Newton (1643-1727) die Infinitesimalrechnung begründet. Entscheidend für die Analysis ist der Begriff des Unendlichen, welcher jedoch erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts präzise gefasst werden konnte. Wichtige Beiträge leisteten hierbei L. Lagrange (1736-1813), A. Cauchy (1789-1857) und C. F. Gauss (1777-1855), sowie auch B. Bolzano (1781-1848), R. Dedekind (1831-1916), G. F. B. Riemann (1826-1866) H. Lebesgue (1875-1941).

# Kapitel 1: Elemente der Topologie

''La filosofia naturale \`e scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi, io dico l'universo, ma non si pu\`o intendere se prima non s'impara a intender la lingua e conoscer i caratteri nei quali \`e scritto. Egli \`e scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi \` impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi \`e un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto.''

Galileo Galilei, Il Saggiatore, in Opere di Galileo Galilei (a cura di Franz Brunetti), UTET, Torino, 1980, vol. I, pp. 631-632.

## 1.1 Metrische Räume

Wir beginnen mit der Einführung von metrischen Räumen.

1.1.1 Definition:

Sei X eine Menge und d:X \times X \rightarrow \R eine Abbildung, welche für alle p,q,r \in X folgende Eigenschaften hat:

1. d(p,q) \geq 0,
2. d(p,q) = d(q,p),
3. d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q) (Dreiecksungleichung),
4. d(p,q)=0 genau dann, falls p=q.

Dann stellt das Paar (X,d) einen metrischen Raum dar. Die Zahl d(p,q) heißt Abstand zwischen p und q und die Funktion d Metrik.

1.1.2 Beispiel: [Euklidischer Raum]

Der n-dimensionale reelle euklidische Raum \R^n und der komplexe euklidische Raum \C^n sind metrische Räume versehen mit der Metrik

d(z,w) = | z-w| =\sqrt{ \sum \_{i=1}^n (z\_i-w\_i)\overline{(z\_i-w\_i)}}.

1.1.3 Beispiel: [Diskreter metrischer Raum]

Ist X eine Menge und definiert man d(p,q)=0 falls p=q und d(p,q)=1 falls p\not=q, so erhält man den sogenannten {diskreten metrischen Raum}.

1.1.4 Beispiel:

Sei (X,d) ein metrischer Raum und A\subset X eine Teilmenge. Dann entsteht durch Einschränkung von d auf A\times A ein metrischer Raum.

1.1.5 Beispiel: [Kartesisches Produkt metrischer Räume]

Seien (X\_1,d\_1), \dots, (X\_j,d\_j) metrische Räume. Wir betrachten das kartesische Produkt X=X\_1 \times \dots \times X\_j und definieren für p=(p\_1,\dots, p\_j) \in X und q=(q\_1,\dots, q\_j) \in X

d(p,q) =\sqrt{ \sum\_{i=1}^j d\_i(p\_i,q\_i)^2}.

Dann stellt (X,d) einen metrischen Raum dar, welcher als {kartesisches Produkt} der metrischen Räume (X\_1,d\_1),\dots (X\_j,d\_j) bezeichnet wird. Offenbar ist lediglich die Dreiecksungleichung einzusehen. Wir berechnen hierzu für beliebige r\_i, p\_i, q\_i \in X\_i

d(p,q)^2 \leq \sum\_{i=1}^j (d\_i(p\_i,r\_i)+ d\_i(r\_i,q\_i) )^2

\leq \sum\_{i=1}^j d\_i(p\_i,r\_i)^2+2 \sum\_{i=1}^j d\_i(p\_i,r\_i) \, d\_i(r\_i,q\_i) + \sum\_{i=1}^j d\_i(p\_i,q\_i)^2.

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ergibt sich dann

 d(p,q)^2 \leq d(p,r)^2 + 2 d(p,r) \cdot d(r,q)+ d(r,q)^2 = (d(p,r) + d(r,q) )^2

und damit die Behauptung.

1.1.6 Beispiel:

Wir betrachten einen metrischen Raum (X,d) und definieren die Abbildung

\bar d: X \times X \rightarrow \bar d(p,q) = \frac{d(p,q)}/{1+d(p,q)}#.

Dann ist (X,\bar d) ebenfalls ein metrischer Raum. Tatsächlich ist lediglich die Dreiecksungleichung zu zeigen. Sei so a=d(p,q), b=d(p,r), c=d(r,q). Aufgrund der Dreiecksungleichung für die Metrik d gilt a \leq b+c, so dass offenbar

a \leq b+c +2 cb+abc.

Addiert man ab + ac +abc auf beiden Seiten, so erhält man

a(1+b)(a+c) \leq b(1+a) (1+c) + c(1+a) (1 + b)

und hieraus

\frac a/{1+a}# \leq \frac b/{1+b}# + \frac c/{1+c}#,

was zu beweisen war.

1.1.7 Definition:

Sei (X,d) ein metrischer Raum und x \in X, \epsilon>0. Dann heißt

K(x,\epsilon)={y \in X: d(x,y) < \epsilon}

{ \epsilon-Kugel um x in X}.

1.1.8 Beispiel:

Der Raum X=\R^2 mit der Maximumsmetrik

d(x,y)= \max \mklm{|x\_1-y\_1|,|x\_2-y\_2|}

ist ein metrischer Raum (Übungsaufgabe!) und die Kugeln um den Ursprung (0,0) haben die Gestalt

 K(0,\epsilon)= \mklm{x \in X: |x\_1|,|x\_2| < \epsilon}.

1.1.9 Definition:

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Ein Punkt a \in A \subset X heißt innerer Punkt der Menge A, falls eine \epsilon-Kugel in X mit K(a,\epsilon) \subset A existiert. Die Menge aller inneren Punkte von A wird mit \Int\_X A oder schlichtweg mit \Int A, falls der umgebende Raum als bekannt vorausgesetzt wird, bezeichnet und Inneres von A genannt.

1.1.10 Satz:

Für jeden metrischen Raum (X,d) gilt

Aufzählungsanfang:

1. \Int X = X.
2. Für jede Teilmenge A\subset X gilt \Int A \subset A.
3. Für zwei Teilmengen A,B \subset X gilt \Int (A \cap B) = \Int A \cap \Int B.
4. \Int (\Int A) = \Int A.
5. Für Teilmengen A,B mit A \subset B gilt \Int A \subset \Int B.
6. Für Teilmengen A\_i \subset X gilt cup\_{i \in I} \Int A\_i \subset \Int (cup\_{i \in I} A\_i).

Aufzählungsende

Beweis:

Offenbar ergeben sich die ersten beiden Eigenschaften unmittelbar aus der Definition. Wenden wir uns somit (3) zu. Sei x \in \Int (A\cap B) und \epsilon>0 derart, dass K(x,\epsilon) \subset A\cap B. Dies aber bedeutet, dass x \in \Int A und x \in \Int B, wodurch die erste Inklusion gezeigt ist. Um die Umkehrung einzusehen, betrachten wir x \in \Int A\cap \Int B. Dann existieren \epsilon\_1,\epsilon\_2> mit K(x,\epsilon\_1)\subset A und K(x,\epsilon\_2) \subset B. Wählen wir nun ein \epsilon>0 derart, dass \epsilon<\min(\epsilon\_1,\epsilon\_2), so folgt K(x,\epsilon) \subset A\cap B und damit x \in \Int(A\cap B). Damit ist (3) bewiesen.

Wir zeigen als nächstes (4). Mit (2) ist \Int A = (\Int A) \cap A, so dass infolge von (3)

\Int ( \Int A) =\Int ( (\Int A) \cap A)\subset \Int A.

Für die Umkehrung betrachten wir abermals ein x \in \Int A und ein entsprechendes \epsilon>0, so dass K(x,\epsilon ) \subset A. Wir zeigen, dass sogar K(x,\epsilon) \subset \Int A gilt, d.h.

\forall y \in K(x,\epsilon) \exists \delta>0: K(y,\delta) \subset A.

Denn sei y \in K(x,\epsilon) gegeben und setze \delta=\epsilon -d(x,y). Für z \in K(y,\delta) gilt dann

d(z,x) \leq d(z,y)+d(y,x)\leq \delta + d(x,y)=\epsilon

und damit z \in K(x,\epsilon)\subset A.

Um (5) einzusehen, bemerken dass aus A\subset B die Gleichheit A=A\cap B folgt. Mit (3) erhalten wir somit

\Int A = \Int (A \cap B) = \Int A \cap \Int B \subset \Int B.

Seien schließlich Teilmengen A\_i \subset X gegeben. Aus A\_j \subset cup\_{i \in I} A\_i folgt mittels (5) die Inklusion \Int A\_j \subset \Int (cup\_{i \in I} A\_i) und damit (6).

1.1.11 Bemerkung:

Sei X=\R und A=\Q, B=\R-\Q. Dann ist \Int A=\Int B=\emptyset, jedoch A \cup B=\R, so dass \Int A \cup \Int B \not \supset \Int (A \cup B).

Für beliebige Teilmengen A,B \subset X gilt somit im Allgemeinen nicht \Int A \cup \Int B = \Int (A \cup B).

Sei A=\R. Dann gilt jeweils

\Int \_\R A=\R, \Int \_{\R^2} A=\emptyset.

Das Innere einer Menge ist somit nicht schlechthin definiert, sondern immer relativ zu einem umgebenden Raum zu verstehen.

Wir kommen nun zum Begriff einer offenen Menge.

1.1.12 Definition:

Eine Teilmenge A \subset X eines metrischen Raumes (X,d) heißt offene Menge von X, falls jeder Punkt von A ein innerer Punkt von A in X ist. Die Familie aller offenen Mengen eines metrischen Raumes (X,d) wird mit \O\_X bezeichnet und stellt die Topologie des gegebenen Raumes dar.

Aus letzterem Satz ergibt sich unmittelbar folgendes

1.1.13 Korollar: Sei (X,d) ein metrischer Raum.

(1) Sei A\subset X eine Teilmenge. Dann ist \Int A die größte offene Teilmenge, welche in A enthalten ist.

(2) Jede \epsilon-Kugel K(x,\epsilon) in (X,d) ist offen.

Beweis:

Infolge von Satz 1.1.10 (4) ist \Int A tatsächlich eine offene Menge. Ist nun B\subset A eine beliebige offene Menge, so impliziert Satz 1.1.10 (5)

B= \Int B \subset \Int A.

Damit folgt (1). Um (2) einzusehen, bemerken wir, dass für beliebiges y \in K(x,\epsilon) die Inklusion K(y, \epsilon -d(x,y)) \subset K(x,\epsilon) gilt. Damit ist jeder Punkt von K(x,\epsilon) ein innerer Punkt.

1.1.14 Satz:

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Die Familie \O\_X hat folgende Eigenschaften:

1. \emptyset, X \in \O\_X;
2. sind A\_1,A\_2 \in \O\_X offene Mengen, so ist auch A\_1\cap A\_2 \in \O\_X;
3. sind A\_i \in \O\_X offene Mengen, so gilt cup\_{i \in I} A\_i \in \O\_X.

Beweis:

Offenbar sind \emptyset und X jeweils offene Mengen in X und somit ist (1) klar. Seien weiter A\_i \in \O\_X, i \in I offene Mengen, also A\_i=\Int A\_i. Satz 1.1.10 (3) impliziert dann, dass

\Int (A\_1 \cap A\_2) = A\_1 \cap A\_2

und wir erhalten (2). Entsprechend folgt aus Satz 1.1.10 (6) schließlich

\Int ( cup\_{i \in I} A\_i ) \subset cup\_{i \in I} A\_i = cup\_{i \in I} \Int A\_i \subset \Int (cup\_{i \in I} A\_i )

und damit (3). Damit ist alles bewiesen.

1.1.15 Satz:

Sei (X,d) ein metrischer Raum und A\subset X eine beliebige Teilmenge, sowie B\subset A eine weitere Menge. Dann gilt

B ist offen in (A,d\_{|A}) \iff B= U \cap A, U { offen in } X.

Beweis:

Sei B\subset A offen in dem metrischen Raum (A,d\_{|A}). Dann ist

\label{eq:1}

\forall x \in B \exists \epsilon\_x>0: K\_A (x,\epsilon\_x) \subset B,

wobei K\_A(x, \epsilon) eine \epsilon-Kugel um x in A bezeichnet. Betrachte nun

U= cup\_{x \in B} K\_X(x, \epsilon\_x),

eine Vereinigung von \epsilon-Kugeln in X. Nach vorigem Satz ist U offen in X. Des Weiteren ist nach Konstruktion B\subset U, sowie mit \eqref{eq:1}

U \cap A = cup\_{x \in B} K\_A(x, \epsilon\_x)\subset B.

Es folgt B=U\cap A.

Se nun umgekehrt B=U\cap A, U offen in X. Aus x \in B folgt x \in U. Also existiert ein \epsilon\_x>0 derart, dass K\_X(x,\epsilon\_x) \subset U. Es folgt

K\_X(x,\epsilon\_x) \cap A\subset B

und damit auch K\_A(x, \epsilon\_x) \subset B. Da x \in B beliebig war, folgern wir, dass B offen in A ist.

1.1.16 Definition:

Die abgeschlossene Hülle oder der Abschluss einer Teilmenge A\subset X eines metrischen Raumes (X,d) ist gegeben durch

\overline A = \mklm{x \in X: { für alle \epsilon>0 ist } K(x,\epsilon) \cap A \not=\emptyset}.

Die Menge A heißt abgeschlossen, falls \overline A=A.

Die folgende Proposition enthält eine weitere Charakterisierung der abgeschlossenen Hülle einer Menge.

1.1.17 Proposition:

Es gilt \overline A=X - \Int\_X(X-A).

Beweis:

Es ist x \in X- \Int(X-A) \iff \forall \epsilon>0 ist K(x,\epsilon) \not \subset X-A.

Dies jedoch ist äquivalent zu K(x,\epsilon) \cap A \not= \emptyset, was wiederum bedeutet, dass x\in \overline A und wir erhalten die Behauptung.

Seien nun A,B beliebige Teilmengen einer Menge X. Dann gelten die Identitäten

X-(A\cup B) = (X-A) \cap (X-B), X-(A\cap B) = (X-A) \cup (X-B).

1.1.18 Satz:

Seien A,B beliebige Teilmengen eines metrischen Raumes (X,d). Dann gilt

1. \overline \emptyset =\emptyset;
2. A \subset \overline A;
3. \overline{A \cup B} = \overline A \cup \overline B;
4. \overline{\overline A}=\overline A.

Beweis:

Um (1) einzusehen, bemerken wir, dass nach Proposition 1.1.17 und Satz 1.1.10 (1)

 \overline \emptyset = X -\Int (X-\emptyset)=X -\Int X = X-X = \emptyset.

Weiter impliziert Satz 1.1.10 (2), dass

 A= X-(X-A) \subset X- \Int(X-A) = \overline A

und wir erhalten (2). Schließlich ist

\overline{A\cup B} = X- \Int( X - ( A\cup B)) = X - \Int(( X- A) \cap (X-B))

= (X- \Int (X-A)) \cup ( X- \Int(X-B)) = \overline A \cup \overline B.

infolge von Satz 1.1.10 (3) und es folgt (3). Satz 1.1.10 (4) bedeutet endlich, dass

\overline{\overline A} = X- \Int( X - \overline A) = X - \Int( X- (X- \Int (X-A)))

= X -\Int( \Int (X-A)) = X-\Int (X-A) = \overline A.

Es folgt (4) und damit der Satz.

1.1.19 Beispiel:

 Die Begriffe der offenen und abgeschlossenen Menge hängen entscheidend vom umgebenden Raum ab. Tatsächlich ist die Menge A= \mklm{1,1/2,1/3,\dots} abgeschlossen in \R^+, jedoch nicht in \R.

1.1.20 Satz:

Sei (X,d) ein metrischer Raum.

1. Eine Teilmenge A \subset X ist genau dann abgeschlossen in X, falls das Komplement X-A offen in X ist.
2. \emptyset, X sind abgeschlossene Mengen.
3. Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
4. Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Beweis:

Es genügt offenbar (1) zu beweisen, da sich alle weiteren Aussagen aus den entsprechenden Aussagen aus Satz 1.1.14 über offene Mengen ergeben. Sei also A=\overline A und x \in A. Dann ist

A= \mklm{x \in X: für jedes \epsilon>0 gilt K(x,\epsilon) \cap A \not=\emptyset}.

Demzufolge gilt y \in X-A genau dann, falls ein \epsilon>0 mit K(y,\epsilon) \cap A=\emptyset, mithin K(y,\epsilon) \subset X-A existiert. Dies wiederum ist äquivalent dazu, dass X-A offen ist.

1.1.21 Korollar:

Der Abschluss \overline A einer Teilmenge A\subset X ist die kleinste abgeschlossene Menge, welche A enthält.

Beweis: Übungsaufgabe.

1.1.22 Beispiel:

Offene bzw. abgeschlossene Intervalle sind offene bzw. abgeschlossene Teilmengen in \R.

1.1.23 Beispiel:

Der Durchschnitt beliebig vieler offener Mengen ist im Allgemeinen nicht offen. So ist etwa in einem metrischen Raum (X,d) der Durchschnitt der Kugeln K(x,1/n), n=1,2,\dots, x \in X, durch den Punkt x gegeben und somit abgeschlossen. Entsprechend ist die Vereinigung von unendlich vielen abgeschlossenen Mengen im Allgemeinen nicht abgeschlossen.

1.1.24 Bemerkung:

Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass im allgemeinen für einen metrischen Raum (X,d) und \epsilon>0

\overline{K(x,\epsilon)} \not= \mklm{y \in X:d(x,y) \leq \epsilon}

gilt. Betrachten wir etwa den diskreten metrischen Raum (Y,d) und einen beliebigen Punkt y \in Y. Dann ist K(y,1)= \mklm{y}, so dass

\overline{K(y,1)}= \mklm{y} \not= \mklm{z \in Y: d(y,z) \leq 1} =Y.

Wir kommen nun zur folgenden wichtigen Definition:

1.1.25 Definition:

Eine Teilmenge A\subset X eines metrischen Raumes (X,d) heißt dicht, falls \overline A=X gilt, was äquivalent dazu ist, dass X-A keine Kugel enthält (Übungsaufgabe).

1.1.26 Proposition:

Die Menge aller rationalen Zahlen \Q liegt dicht in der Menge der reellen Zahlen \R.

Beweis:

Da jedes offene Intervall (a,b) eine rationale Zahl enthält, ist das Innere von \R-\Q leer. Damit aber ist \overline \Q= \R-\Int(\R-\Q)=\R.

Am Ende dieses Abschnittes führen wir noch den topologischen Rand einer Menge ein.

1.1.27 Definition:

Sei (X,d) ein metrischer Raum und A\subset X eine Teilmenge. Dann definiert man

\gd(A):=\overline{A}\cap\overline{X-A}

als den Rand der Menge A.

1.1.28 Lemma: \index{Rand}

Sei (X,d) ein metrischer Raum, A\subset X eine Teilmenge.

1. \overline{A}=\Int(A) \stackrel{.}{\cup} \gd(A) (\stackrel{.}{\cup} bedeutet disjunkte Vereinigung),
2. \gd(\Int(A)) \subset \gd(A),
3. \gd(\overline{A}) \subset \gd(A).

Beweis:

Übungsaufgabe.

## 1.2 Konvergente Folgen in metrischen Räumen

In diesem Abschnitt führen wir den für die Analysis zentralen Begriff der Konvergenz ein.

Es bezeichne im folgenden (X,d) stets einen metrischen Raum.

1.2.1 Definition:

Eine Folge von Punkten x\_1, x\_2, \dots aus X konvergiert gegen x \in X, falls

\forall \epsilon > 0 \exists N \in \N: d(x\_n,x) < \epsilon \forall n \geq N.

In diesem Fall schreiben wir x\_n \to x oder \lim\_{n\to \infty} x\_n=x. Der Punkt x heißt Grenzwert der Folge x\_1,x\_2,\dots. Die Folge selbst wird mit \mklm{x\_n} oder (x\_n) bezeichnet.

1.2.2 Proposition:

Der Grenzwert einer Folge von Punkten \{x\_n\} ist eindeutig.

Beweis:

Angenommen, die Folge \mklm{x\_n} konvergiert sowohl gegen x als auch gegen \tilde x und x \not = \tilde x. Dann existiert ein \delta>0 mit d(x,\tilde x)=\delta. Da jedoch für jedes \epsilon>0 jeweils N, \tilde N \in \N mit

d(x\_n,x) < \epsilon/2 \forall n \geq N, d(x\_{n},\tilde x) < \epsilon/2 \forall n \geq \tilde N

existieren, folgt hieraus mit der Dreiecksungleichung für n \geq \max(N,\tilde N)

d(x,\tilde x) \leq d(x,x\_n) + d(x\_n,\tilde x)<\epsilon.

Für \epsilon < \delta ergäbe sich dann ein Widerspruch.

1.2.3 Definition:

Eine Teilmenge A\subset X heißt beschränkt, falls ein Punkt x \in X und ein M>0 existieren mit A \subset K(x,M).

1.2.4 Proposition:

Sei x\_1,x\_2,\dots eine konvergente Folge in X. Dann ist die Menge \mklm{x\_n} beschränkt.

Beweis:

(Übungsaufgabe).

1.2.5 Satz:

Wir betrachten das kartesische Produkt X = X\_1\times \dots \times X\_m der metrischen Räume (X\_1,d\_1), \dots, (X\_m,d\_m). Eine Folge von Punkten x\_n=(x\_n^1, \dots, x\_n^m)\in X konvergiert genau dann gegen einen Punkt x=(x^1,\dots, x^m) in X, falls

\lim\_{n \to \infty} x^j\_n =x^j \forall j=1, \dots, m.

Beweis:

Die angegebene Bedingung ist notwendig infolge der Abschätzung

d\_k(x^k\_n,x^k) \leq d\_X(x\_n,x)=\sqrt{ \sum\_{\j=1}^m d^2\_j(x^j\_n,x^j)}, 1\leq k \leq m

und offenbar auch hinreichend.

1.2.6 Bemerkung:

Obiger Satz impliziert, dass eine Folge von komplexen Zahlen z\_n=x\_n+i y\_n genau dann in \C \simeq \R^2 konvergiert, falls die Folgen ihrer Realteile x\_n und ihrer Imaginärteile y\_n konvergieren.

1.2.7 Satz:

Sei A\subset X eine Teilmenge. Dann gilt x \in \overline A genau dann, falls eine Folge x\_1,x\_2, \dots \in A existiert mit \lim x\_n=x.

Beweis:

Sei x \in \overline A. Dann gilt für jedes \epsilon>0, dass K(x,\epsilon) \cap A \not=0. Betrachte deshalb die Folge von Kugeln K(x,1/n), n=1,2, \dots , und wähle in jeder Kugel jeweils einen Punkt x\_n \in K(x,1/n)\cap A. Dann konvergiert die Folge x\_1,x\_2, \dots\in A gegen x. Sei umgekehrt \mklm{x\_n} eine Folge in A mit \lim x\_n=x. Dann enthält jede \epsilon-Kugel um x mindestens einen Punkt aus A, so dass x \in \overline A.

1.2.8 Korollar:

Sei A\subset X eine Teilmenge. Dann ist A abgeschlossen genau dann, falls der Grenzwert jeder in X konvergenten Folge, deren Glieder vollständig in A liegen, ebenfalls in A liegt.

Beweis:

(Übungsaufgabe!).

1.2.9 Beispiel:

Sei (X,d) der diskrete metrische Raum und \mklm{x\_n} eine Folge in X. Dann konvergiert \mklm{x\_n} genau dann gegen x\in X, falls x\_n=x für hinreichend großes n gilt.

Der folgende Satz fasst wichtige Rechenregeln für Grenzwerte zusammen. Falls nicht anders angegeben, sind \C^n und \R^n stets mit der Euklidischen Metrik versehen.

1.2.10 Satz: Rechenregeln für Grenzwerte

Es seien z\_k,w\_k zwei Folgen in \C^n mit \lim z\_k=z und \lim w\_k=w. Dann gilt

Aufzählungsanfang

(1) \lim(z\_k+w\_k) =z+w;

(2) für jedes c \in \C gilt \lim c \cdot z\_k= c \cdot z;

(3) \lim \eklm{z\_k,w\_k} = \eklm{z,w}.

Sind insbesondere z\_k,w\_k\in \C Folgen komplexer Zahlen, so ist

(4) \lim(z\_k \cdot w\_k) = z \cdot w;

(5) \lim \frac{z\_k}/{w\_k}# = z/w, sofern w\not=0.

Aufzählungsende

Beweis:

Wir bemerken zunächst, dass infolge der Dreiecksungleichung

|(z\_k +w\_k) - (z+w)| \leq |z\_k-z| + |w\_k-w|.

Sei nun \epsilon >0 gegeben. Da die Folgen z\_k, w\_k in \C^n jeweils gegen z und w konvergieren, existiert eine Zahl N \in \N derart, dass

|z\_k-z| < \epsilon/2, |w\_k-w| < \epsilon/2 \forall k \geq N.

Für k \geq N gilt somit |(z\_k +w\_k) - (z+w)|<\epsilon und wir erhalten (1).

Des Weiteren ist (2) offenbar trivial für c=0. Sei also c\not=0 und \epsilon>0 gegeben. Dann existiert ein N \in N derart, dass für alle k \geq N die Ungleichung |z\_k-z| < \epsilon/|c| gilt. Hieraus jedoch folgt

|c z\_k -cz| = |c| |z\_k-z| < \epsilon

und damit (2).

Um (3) einzusehen, bemerken wir zunächst, dass infolge der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

|\eklm{z\_k,w\_k} - \eklm{z,w}|

= |\eklm{z\_k-z,w\_k} - \eklm{ z, w-w\_k}|

\leq | \eklm{z\_k-z,w\_k}| + |\eklm{z,w-w\_k}|

 \leq |z\_k-z| |w\_k| + | z| | w - w\_k|

gilt. Da die konvergente Folge w\_n beschränkt ist, existiert ein C>0, so dass |w\_k| \leq C. Wähle nun zu gegebenem \epsilon >0 ein N\in \N mit

|z\_k-z| < \frac{\epsilon}/{2C}#, |w\_k -w | < \frac {\epsilon}/{ 2 |z|}# \forall k \geq N.

Dann ist insgesamt |\eklm{z\_k,w\_k} - \eklm{z,w}|<\epsilon und wir erhalten (3).

Zum Beweis von (4) bemerken wir, dass

|z\_k w\_k -zw| = | (z\_k-z)w\_k -z(w-w\_k)| \leq |z\_k-z| |w\_k| + | z| | w - w\_k|.

Eine Wiederholung der vorangegangenen Abschätzungen ergibt dann (4).

Wir beweisen schließlich (5). Da \lim w\_k =w\not=0, existieren ein \delta >0 und ein N\in N derart, dass |w\_k|>\delta für alle k\geq N. Für k \geq N ist somit

 | \frac {z\_k}/{w\_k}# - z/w | = | \frac{z\_kw-w\_kz}/{w\_kw}# | = | \frac{(z\_k-z) w- (w\_k -w) z}/{w\_kw}#| \leq \frac {|z\_k-z||w| + |w\_k -w| |z|}/{\delta | w| }#.

Eine ähnliche Argumentation wie oben ergibt dann (5).

Wir berechnen als nächstes einige wichtige Grenzwerte.

1.2.11 Satz:

Aufzählungsanfang

(1) Sei x>0. Dann gilt \lim\_{n\to \infty} \sqrt[n]{x}=1.

(2) \lim\_{n \to \infty}\sqrt[n]{n} =1.

(3) Sei |x|<1. Dann gilt \lim\_{n \to \infty} x^n=0.

Aufzählungsende

Beweis:

Um (1) zu beweisen, nehmen wir zunächst an, dass x >1 gilt und betrachten die Folge x\_n= \sqrt[n]{x}-1. Deren Glieder sind stets echt positiv und nach der Bernoulli--Ungleichung gilt

1+n x\_n\leq (1+x\_n)^n=x.

Also gilt 0<x\_n< \frac{x-1}/{n}#. Für n \to \infty konvergiert somit x\_n gegen null und wir erhalten (1) unter der Annahme, dass x>1. Ist nun 0<x<1, so folgt aus obigem \lim\_{n\to \infty} \sqrt[n]{1/x}=1 und daraus insgesamt \lim\_{n\to \infty} \sqrt[n]{x}=1 für beliebiges x>0.

Zum Beweis von (2) verfahren wir entsprechend und betrachten die Folge x\_n= \sqrt[n]{n} -1. Dann gilt

n/2 (n-1)x^2\_n \leq (1+x\_n)^n=n (Übungsaufgabe!),

und somit 0< x\_n \leq \sqrt{\frac{2}/{n-1}#}. Damit folgt (2).

Sei schließlich |x| <1 und schreibe |x|=1/(1+p) für ein p>0. Nach der Bernoullischen Ungleichung ist dann abermals 1+np \leq (1+p)^n, mithin

0< |x|^n \leq \frac{1}/{1+np}#.

Für n \to \infty gilt dann |x|^n=|x^n| \to 0 und wir erhalten (3). Damit ist alles bewiesen.

Wir wollen nun präzisieren, was unter der Aussage, dass eine gegebene Zahlenfolge gegen Unendlich konvergiert, zu verstehen ist.

1.2.12 Definition:

Eine Folge \mklm{x\_n} reeller Zahlen konvergiert gegen +\infty, falls

\forall M\in \R\_+ \exists N \in N: x\_n\geq M \forall n \geq N.

Entsprechend konvergiert eine Folge x\_n reeller Zahlen gegen -\infty, falls

\forall \tilde M \in \R\_- \exists N \in N: x\_n\leq \tilde M \forall n \geq N.

1.2.13 Bemerkung:

Es genügt nicht, dass einzelne Folgenglieder beliebig groß oder klein werden, um gegen +\infty oder -\infty zu konvergieren. So konvergiert etwa die Folge 1,0,2,0,4,0,8,0,16,... weder gegen +\infty noch gegen keinen anderen endlichen Zahlenwert.

1.2.14 Lemma:

Konvergiert die Folge \mklm{x\_n} gegen +\infty und die Folge \mklm{y\_n} entweder gegen y>0 oder gegen +\infty, so konvergiert die Produktfolge x\_ny\_n ebenfalls gegen +\infty.

1.2.15 Bemerkung:

Aus den Aussagen x\_n \to \infty und y\_n \to 0 kann im Allgemeinen nichts über das Konvergenzverhalten der Produktfolge x\_ny\_n ausgesagt werden.

Ein nützliches Kriterium zur Handhabung von Grenzwerten liefert folgende

1.2.16 Proposition: Einschachtelungsprinzip

Seien \mklm{x\_n}, \mklm{y\_n} und \mklm{z\_n} drei Folgen reeller Zahlen und gelte

x\_n \leq y\_n \leq z\_n

für alle n \in \N. Des Weiteren sei

\lim x\_n = \lim z\_n = \alpha \in \R\cup \mklm{\pm \infty}.

Dann gilt auch \lim y\_n =\alpha.

Beweis:

Ist \alpha = \pm \infty, so ist die Behauptung klar. Sei also \alpha \in \R. Mit der Dreiecksungleichung folgert man

|y\_n-\alpha| \leq |y\_n -x\_n| + |x\_n - \alpha|.

Da jedoch |y\_n-x\_n| \leq |z\_n-x\_n| gilt, ist

|y\_n-\alpha| \leq |z\_n -x\_n| + |x\_n - \alpha|\leq |z\_n-\alpha| + 2 |x\_n -\alpha| \to 0

und wir erhalten die Behauptung.

1.2.17 Beispiel:

Es gilt \lim\_{n\to \infty} \frac {\sin n}/{n^2}#=0. Tatsächlich ist

\frac{-1}/{n^2}# \leq \frac{\sin n}/{n^2}# \leq \frac{1}/{n^2}#

so dass infolge der letzten Proposition die Aussage folgt.

1.2.18 Beispiel:

Seien a,b,c \geq 0 positive Zahlen. Dann gilt \lim\_{n\to \infty} \sqrt[n]{a^n+b^n +c^n} = \max(a,b,c). Ist etwa a \geq b,c, so berechnet man

\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{1+ (b/a)^n + (c/a)^n} \leq \sqrt[n]{3}.

Die Behauptung folgt dann mit Satz 1.2.10 (2), 1.2.11 (1) und obiger Proposition.

1.2.19 Definition:

Eine Eigenschaft gilt für fast alle n \in \N, falls sie für alle n bis auf endlich viele Ausnahmen gilt.

Wir kommen nun zu einem klassischen Satz der Analysis.

1.2.20 Satz: Satz von Bolzano--Weierstraß

Jede beschränkte unendliche Folge \mklm{x\_n} reeller Zahlen enthält eine unendliche konvergente Teilfolge \mklm{x\_{n\_k}}.

Beweis:

Sei \mklm{x\_n} eine Folge beschränkter Zahlen mit unendlich vielen Gliedern. Dann existiert eine Schranke M>0, so dass |x\_n| \leq M für alle n \in \N. Wir betrachten nun die Menge

A= \mklm{ x\in \R: x< x\_n { für unendlich viele n} }.

Offenbar ist -M \in A und somit A \not=\emptyset. Weiterhin ist A nach oben durch M beschränkt. Infolge der Supremumseigenschaft von \R besitzt somit A ein Supremum, welches wir mit a=\sup A bezeichnen. Als obere Schranke erfüllt a die Relation a+\epsilon \not \in A für jedes beliebige \epsilon >0. Damit kann a+\epsilon <x\_n nur für endlich viele n gelten. Mit anderen Worten, für gegebenes \epsilon >0 gilt

x\_n \leq a + \epsilon für fast alle n.

Da a zudem die kleinste obere Schranke von A ist, kann weiter für beliebiges \epsilon >0 die Zahl a-\epsilon keine obere Schranke mehr von A sein. Also existiert ein x \in A mit a-\epsilon <x, so dass

a-\epsilon <x\_n für unendlich viele n.

Zusammenfassend erhalten wir, dass für beliebiges \epsilon>0

a-\epsilon \leq x\_n \leq a+\epsilon für unendlich viele n.

Für \epsilon=1, \epsilon=1/2, ... existieren demnach jeweils Folgenglieder x\_{n\_1}, x\_{n\_2}, ... mit

a-1 \leq x\_{n\_1} \leq a+1, a-1/2 \leq x\_{n\_2} \leq a+1/2, ...

Setzt man nun a\_k=x\_{n\_k}, so erhält man eine unendliche Teilfolge von \mklm{x\_n}, die |a\_k-a| < 1/k und somit

\lim\_{k\to \infty} a\_k= \lim\_{k \to \infty} x\_{n\_k}=a

erfüllt. Damit ist der Satz bewiesen.

1.2.21 Definition:

Eine Folge \mklm{x\_n} von reellen Zahlen heißt { monoton wachsend}, falls x\_1 \leq x\_2\leq x\_3 \dots gilt und { monoton fallend}, falls x\_1 \geq x\_2 \geq x\_3 \dots . Sie heißt einfach nur { monoton}, falls einer der beiden Fälle vorliegt.

Der folgende Satz liefert ein wichtiges Kriterium für die Konvergenz von Folgen reeller Zahlen.

1.2.22 Satz:

Jede monotone, beschränkte unendliche Folge reeller Zahlen ist konvergent.

Beweis:

Wir nehmen an, dass die Folge \mklm{x\_n} monoton wachsend und beschränkt ist. Der Satz von Bolzano-Weierstrass besagt dann, dass eine unendliche Teilfolge \mklm{x\_{n\_k}} existiert mit \lim x\_{n\_k} =x \in \R. Weiter können wir annehmen, dass die Teilfolge \mklm{x\_{n\_k}} ebenfalls monoton wachsend ist und ihre Glieder somit x\_{n\_k}\leq x erfüllen. Sei nun \epsilon>0 gegeben und N \in \N derart, dass |x\_{n\_k}-x| <\epsilon für alle k\geq N. Es gilt x\_{n\_N} \leq x\_m \leq x für alle m\geq n\_N. Denn wäre stattdessen x<x\_{m\_0} für ein m\_0 \geq n\_N, so würde aufgrund der Monotonizität von \mklm{x\_n} bereits x<x\_m für alle m \geq m\_0 und somit auch für Glieder der (unendlichen!) Teilfolge \{x\_{n\_k}\} gelten, Widerspruch. Damit aber ist

 |x-x\_m| \leq |x-x\_{n\_N}| <\epsilon \forall m \geq n\_N,

was besagt, dass \lim x\_m =x.

1.2.23 Definition:

Sei \mklm{x\_n} eine Folge reeller Zahlen. Dann heißt

E(\mklm{x\_n}) = \mklm{ x \in \R\cup \mklm{\pm \infty}: \exists Teilfolge x\_{n\_k}: \lim\_{k \to \infty} x\_{n\_k} =x}

Limesmenge der Folge \mklm{x\_n}.

1.2.24 Satz:

Die Limesmenge einer Folge \mklm{x\_n} reeller Zahlen ist eine nicht-leere Menge, deren Durchschnitt mit \R abgeschlossen in \R ist.

Beweis:

Ist die Folge \mklm{x\_n} beschränkt, so existiert nach dem Satz von Bolzano--Weierstrass eine konvergente Teilfolge. Ist die Folge hingegen unbeschränkt, so existiert nach Definition eine Teilfolge, welche gegen +\infty oder -\infty konvergiert. Damit ist E(\mklm{x\_n}) nicht leer. Setze

F=\R-\R \cap E(\mklm{x\_n}).

Wir zeigen, dass F offen in \R ist. Sei somit y \in F. Wir müssen zeigen, dass ein \epsilon>0 existiert mit K(y,\epsilon) \subset F. Um dies einzusehen, führen wir einen Widerspruchsbeweis. Angenommen, für jedes \epsilon>0 ist K(y,\epsilon) \cap (\R\cap E(\mklm{x\_n}))\not=\emptyset und betrachte die Werte \epsilon=1, 1/2,1/3, \dots. Für jedes N \in \N existiert dann eine Teilfolge x^{(N)}\_{n\_k}, welche gegen ein x^{(N)}\in K(y,1/N) konvergiert. Damit erhalten wir eine Teilfolge in \mklm{x\_n}, welche gegen y konvergiert. Dies aber ist ein Widerspruch zu der Voraussetzung, dass y \in F. Damit ist F offen.

1.2.25 Definition: Sei \mklm{x\_n} eine Folge reeller Zahlen. Dann sind der { limes inferior} bzw. { limes superior} besagter Folge definiert als

\liminf x\_n :=\underline{\lim} x\_n =\inf E(\mklm{x\_n}),

\limsup x\_n :=\overline{\lim} x\_n =\sup E(\mklm{x\_n}).

1.2.26 Beispiel

Aufzählungsanfang

1. Sei x\_n=(-1)^n n^2. Dann ist \liminf x\_n = -\infty sowie \limsup x\_n=+\infty.
2. Betrachte die Folge y\_n=(-1)^n(1+1/n). Dann gilt jeweils \liminf y\_n=-1 und \limsup y\_n=+1.

Aufzählungsende

1.2.27 Bemerkung:

Sei \mklm{x\_n} eine Folge reeller Zahlen. Aus der Abgeschlossenheit von E(\mklm{x\_n}) folgt unmittelbar, dass

\liminf x\_n, \limsup x\_n \in E(\mklm{x\_n}).

1.2.28 Satz:

Eine Folge reeller Zahlen \mklm{x\_n} konvergiert genau dann gegen x \in \R \cup \mklm{\pm \infty}, falls \liminf x\_n = \limsup x\_n=x.

Beweis:

Sei zunächst x\_n \to x. Dann konvergiert auch jede Teilfolge von \mklm{x\_n} gegen x, so dass E(\mklm{x\_n})=\{x\}.

Sei nun umgekehrt x=\liminf x\_n = \limsup x\_n\not=\pm \infty. Dann ist E(\mklm{x\_n})=\mklm{x}, was bedeutet, dass jede Teilfolge von \mklm{x\_n} gegen x konvergiert. Würde nun \mklm{x\_n} selbst jedoch nicht gegen x konvergieren, so existierte ein \epsilon >0 derart, dass für alle N\in \N ein n\geq N existiert mit |x-x\_n|\geq \epsilon . Für N=1,2,3,\dots erhalten wir dann eine Teilfolge x\_{n\_1},x\_{n\_2}, x\_{n\_3}, \dots mit |x\_{n\_k}-x| \geq \epsilon. Ist die Folge \mklm{x\_{n\_k}} beschränkt, so enthält sie nach dem Satz von Bolzano--Weierstrass eine gegen ein y\in \R, x\not=y, konvergente Teilfolge, so dass E(\mklm{x\_n})\not=\mklm{x}, Widerspruch. Ist die Folge \mklm{x\_{n\_k}} unbeschränkt, so müsste +\infty oder -\infty in E(\mklm{x\_n}) liegen, was abermals einen Widerspruch darstellt. Also gilt x\_n \to x. Auf dieselbe Weise behandelt man den Fall \liminf x\_n = \limsup x\_n=\pm \infty.

Wir betrachten nun Folgen von Brüchen.

1.2.29 Satz: Satz von Stolz

Seien x\_n und y\_n zwei Folgen reeller Zahlen und gelte

Aufzählungsanfang

 y\_n ist streng monoton wachsend und konvergiert gegen +\infty;

 die Folge \frac{x\_{n+1}-x\_n}/{y\_{n+1}-y\_{n}}# konvergiert gegen y \in \R \cup \mklm{\pm \infty}.

Aufzählungsende

Dann konvergiert die Folge x\_n/y\_n ebenfalls gegen y.

Beweis:

Wir nehmen zunächst an, dass y \in \R. Nach Voraussetzung existiert für jedes \epsilon>0 ein N \in \N derart, dass

| \frac{x\_n-x\_{n-1}}/{y\_n -y\_{n-1}}# -y | < \epsilon

für alle n \geq N. Also gilt

\frac{x\_n-x\_{n-1}}/{y\_n -y\_{n-1}}# \in ]y-\epsilon, y+\epsilon [ für alle n \geq N.

Nun aber berechnet man für n > N

\frac{x\_n-x\_{N}}/{y\_n -y\_{N}}#

= \frac{x\_n-x\_{n-1}}/{y\_n -y\_{N}}#

+ \frac{x\_{n-1}-x\_{n-2}}/{y\_n -y\_{N}}#

+ \cdots + \frac{x\_{N+1}-x\_{N}}/{y\_n -y\_{N}}#

= \frac{x\_n-x\_{n-1}}/{y\_{n}-y\_{n-1}}# \cdot \frac{y\_{n}-y\_{n-1}}/{y\_n -y\_{N}}#

+ \frac{x\_{n-1}-x\_{n-2}}/{y\_{n-1}-y\_{n-2}}# \cdot \frac{y\_{n-1}-y\_{n-2}}/{y\_n -y\_{N}}#

+ \cdots + \frac{x\_{N+1}-x\_{N}}/{y\_{N+1}-y\_{N}}# \cdot \frac{y\_{N+1}-y\_{N}}/{y\_n -y\_{N}}#

\leq \max \{ \frac{x\_n-x\_{n-1}}/{y\_{n}-y\_{n-1}}#, \frac{x\_{n-1}-x\_{n-2}}/{y\_{n-1}-y\_{n-2}}#,

\dots, \frac{x\_{N+1}-x\_{N}}/{y\_{N+1}-y\_{N}}# \}

\dot [\frac{y\_{n}-y\_{n-1}}/{y\_n -y\_{N}}#+\frac{y\_{n-1}-y\_{n-2}}/{y\_n -y\_{N}}#+ \cdots + \frac{y\_{N+1}-y\_{N}}/{y\_n -y\_{N}}# ]

<y+\epsilon.

Analog ergibt sich

\frac{x\_n-x\_{N}}/{y\_n -y\_{N}}#

\geq \min \{ \frac{x\_n-x\_{n-1}}/{y\_{n}-y\_{n-1}}#, \frac{x\_{n-1}-x\_{n-2}}/{y\_{n-1}-y\_{n-2}}#,\dots, \frac{x\_{N+1}-x\_{N}}/{y\_{N+1}-y\_{N}}# \}

\cdot 1

> y-\epsilon.

Demzufolge ist

\label{eq:2}

\frac{x\_n-x\_{N}}/{y\_n -y\_{N}}# \in ]y-\epsilon, y+\epsilon [ {für alle } n > N.

Nun aber berechnet man

\frac{x\_N-yy\_N}/{y\_n}# + (1-\frac{y\_N}/{y\_n}# ) ( \frac{x\_n-x\_N}/{y\_n-y\_N}# -y )

= \frac{x\_n}/{y\_n}# -y.

Da nach Voraussetzung die Folge \mklm{y\_n} monoton wachsend ist, ist für n> N der erste Faktor des Produktes auf der linken Seite \leq 1, so dass in diesem Fall

 | \frac{x\_n}/{y\_n}# -y | \leq | \frac{x\_N-yy\_N}/{y\_n}# |+ | \frac{x\_n-x\_N}/{y\_n-y\_N}# -y |.

Aufgrund der Tatsache, dass y\_n \to +\infty, folgt schließlich mit \eqref{eq:2}, dass x\_n/y\_n \to y.

Wir betrachten als nächstes den Fall, dass y =+\infty. Dann existiert für jede Schranke M>0 ein N \in \N, so dass

M< \frac{x\_n-x\_{n-1}}/{y\_n - y\_{n-1}}# \forall n \geq N.

Dies jedoch ist äquivalent dazu, dass

\lim\_{n \to \infty} \frac{y\_n - y\_{n-1}}/{x\_n-x\_{n-1}}# =0.

Da die Folge \mklm{y\_n} gegen +\infty konvergiert, muss ab einer bestimmten Stelle auch die Folge \mklm{x\_n} wachsen und zudem x\_n \to +\infty gelten. Wendet man nun den Satz von Stolz für endliche Grenzwerte an, so folgt y\_n}/{x\_n \to 0, was äquivalent zu x\_n}/{y\_n \to +\infty ist. Im Fall y=-\infty verfährt man analog.

Als unmittelbare Konsequenz des Satzes von Stolz erhalten wir

1.2.30 Korollar:

Sei \mklm{x\_n} eine Folge reeller Zahlen und gelte x\_n \to x \in \R \cup \mklm{\pm \infty}. Dann konvergiert auch die Folge der arithmetischen Mittel gegen x,

\lim\_{n \to \infty} \frac{ x\_1+ \dots +x\_n}/{n}# = x.

Beweis:

Wir setzen a\_n =x\_1 +\cdots + x\_n, sowie b\_n=n. Da

\lim\_{n \to \infty} \frac{a\_n-a\_{n-1}}/{b\_n -b\_{n-1}}# = \lim\_{n \to \infty} \frac{x\_n}/{1}# =x,

sind die Voraussetzungen des Satzes von Stolz erfüllt und die Behauptung folgt.

1.2.31 Bemerkung:

Es sei bemerkt, dass die Umkehrung dieses Sachverhaltes nicht gilt. So konvergiert etwa die alternierende Folge 0,1,0,1,0,\dots nicht, während die Folge der arithmetischen Mittel 1,1/2, 2/3, 1/2, 3/5, 1/2, \dots gegen 1/2 konvergiert.

1.2.32 Beispiel:

Nach Vorlesung gilt jeweils für x>0

\lim\_{n \to \infty} \sqrt[n]{n}=1, \lim\_{n \to \infty} \sqrt[n]{x} =1.

Nach dem Satz von Stolz gilt dann ebenfalls

\lim\_{n \to \infty} \frac{1+ \sqrt 2 + \dots +\sqrt[n]{n}}/{n}#=1,

\lim\_{n \to \infty} \frac{x+ \sqrt x + \dots +\sqrt[n]{x}}/{n}#=1.

## 1.3 Die Zahl e

Im folgenden Abschnitt wenden wir uns einer für die Analysis zentralen Folge zu, deren Grenzwert durch die Eulersche Zahl e gegeben ist.

1.3.1 Satz:

Die Folge \mklm{(1+ 1/n)^n} ist konvergent und ihr Grenzwert

\lim\_{n \to \infty} (1+ 1/n)^n=:e

liegt zwischen 2 und 3.

Beweis:

Wir bemerken zunächst, dass 2 < (1+1/2)^2=9/4=a\_2 und zeigen als nächstes, dass die Folge mit den Gliedern a\_n=(1+ 1/n)^n monoton wachsend und von oben beschränkt ist. Tatsächlich berechnet man mittels der Bernoulli--Ungleichung

\frac{a\_{n+1}}{a\_n}

= \frac{(1+ 1/{n+1})^{n+1}}/{(1+ 1/n)^n}#

= (1 + 1/n) ( \frac{1 +1/{n+1}}/{1+ 1/n}#)^{n+1}

= (1 +1/n) ( \frac{(n+2)n}/{(n+1)^2}#)^{n+1}

= (1 +1/n) ( \frac{(n+1)^2-1}/{(n+1)^2}#)^{n+1}

= (1 +1/n) (1 -\frac{1}/{(n+1)^2}#)^{n+1}

\geq ( 1 + 1/n) (1 -\frac {n+1}/{(n+1)^2}# )

= ( 1 +1/n) (1 -1/{n+1} )=\frac{n+1}/{n}# \cdot n/{n+1} =1.

Hieraus folgt a\_{n+1} \geq a\_n. Des Weiteren impliziert die binomische Formel mittels der endlichen geometrischen Reihe für beliebiges n

a\_n = 1^n +\binom{n}{1} 1^{n-1} 1/n +\binom{n}{2} 1^{n-2} 1/{n^2} + \dots

+ \binom{n}{n-1} 1 \frac {1}/{n^{n-1}}+ \binom{n}{n} 1/{n^n}

=1+1+\frac{n(n-1)}/{2 \cdot n^2}#+\frac{n(n-1)(n-2)}/{2 \cdot 3 \cdot n^3}# + \dots

+ \frac{n(n-1) \dots 1}/{n! \cdot n^n}#

=1+1+\frac{1-1/n}/{2!}# + \frac{ ( 1 -1/n) (1-2/n )}/{3!}#+ \dots

+ \frac{ ( 1 -1/n) (1-2/n) \dots ( 1 - \frac{n-1}/{n}# ) }/{n!}#

< 1 +1 + 1/{2!}+ 1/{3!}+ \dots + 1/{n!}

\leq 1 +1 +1/2 +1/{2^2} + \dots + \frac{1}/{2^{n-1}}#

= 1+ \frac{1-(1/2)^n}/{1-1/2}#

=1+2 \cdot (1 - 1/{2^n} ) < 3.

Die Behauptung folgt dann mit Satz 1.2.22.

Der folgende Satz enthält eine weitere Charakterisierung der Zahl e.

1.3.2 Satz:

Es ist \lim\_{n \to \infty} \sum\_{k=0}^n 1/{k!} = e.

Beweis:

Sei a\_n=(1+1/n)^n und b\_n=\sum\_{k=0}^n 1/{k!}. Beim Beweis des vorangehenden Satzes hatten wir insbesondere gesehen, dass

\label{eq:3}

a\_n< b\_n < 3.

Somit ist \mklm{b\_n} eine beschränkte und offenbar monoton wachsende Folge und damit nach Satz 1.2.22 konvergent. Des Weiteren impliziert \eqref{eq:3}, dass e=\lim a\_n \leq \lim b\_n. Weiter berechnet man für m<n mit Satz 1.3.1

a\_n

= 1+1+\frac{1-1/n}/{2!}# + \frac{( 1 -1/n) (1-\ 2/n)}/{3!}# + \dots

+ \frac{( 1 – 1/n) (1-2/n) \dots ( 1 - \frac{n-1}/{n}#) }/{n!}#

\geq 1+1+\frac{1-1/n}/{2!}# + \frac{( 1 -1/n) (1-2/n )}/{3!}# + \dots

+ \frac{( 1 -1/n)(1-2/n) \dots ( 1 - \frac{m-1}/{n}#)}/{m!}#

=: c\_{nm}.

Hält man als Nächstes m fest und lässt n gegen unendlich gehen, so folgt für alle m

e= \lim\_{n \to \infty} a\_n\geq \lim\_{n \to \infty} c\_{nm}=b\_m.

Dies aber bedeutet, dass \lim b\_n \leq e und wir erhalten die Behauptung.

1.3.3 Satz:

Die Zahl e ist irrational.

Beweis:

Sei wie zuvor b\_n=\sum\_{k=0}^n 1/{k!}. Wir behaupten, dass für alle n \in \N\_\ast

\label{eq:4}

0< e -b\_n < \frac{1}/{n!n}#.

Da b\_n streng monoton ist, gilt offenbar b\_n <e für alle n. Nun aber gilt nach vorangehendem Satz für festes n

e-b\_n= \lim\_{m \to \infty}(b\_m -b\_n) =\lim\_{m\to \infty} ( \frac {1}/{(n+1)!}#+ \frac {1}/{(n+2)!}# + \dots + \frac{1}/{m!}# ) .

Des Weiteren berechnet man unter Verwendung der endlichen geometrischen Reihe

b\_m-b\_n

= \frac{1}/{(n+1)!}#+ \frac{1}/{(n+2)!}# + \dots + {1}/{m!}

= \frac{1}/{(n+1)!}# (1+\frac{1}/{n+2}# + \frac{1}/{(n+2)(n+3)}# + \cdots + \frac{1}/{(n+2)# \cdots m} )

< \frac{1}/{(n+1)!}# (1+\frac{1}/{n+2}# + \frac{1}/{(n+2)^2}# + \cdots + \frac{1}/{(n+2)^{m-n-1}}# )\\

= \frac{1}/{(n+1)!}# \cdot \frac{1-(\frac{1}/{n+2}#)^{m-n}}\{1-\frac{1}/{n+2}#}

< \frac{1}/{(n+1)!}# \cdot \frac {n+2}/{n+1}# = \frac{1}/{n! n}# \cdot \frac{n(n+2)}/{(n+1)^2}#

< \frac{1}/{n! n}#.

Lässt man nun m gegen unendlich gehen, so folgt

e-b\_n\leq \frac{1}/{n! n}# \cdot \frac{n(n+2)}/{(n+1)^2}# < \frac{1}/{n!n}#

für alle n \in \N\_\ast und damit \eqref{eq:4}. Wir wollen zeigen, dass die Zahl e irrational ist und nehmen hierzu das Gegenteil an. Dann müsste e eine Darstellung der Form

e=p/q, p,q \in \N, p,q teilerfremd,

haben. Für genau dieses q würde dann nach \eqref{eq:4}

0 < e -b\_q < \frac{1}/{q!q}#, mithin 0 < e q! -b\_q q!< 1/q,

gelten. Nun sind jedoch sowohl e q! als auch b\_q q! ganzzahlig. Da dies auch für die Differenz e q! -b\_q q! zutrifft, müsste somit eine natürliche Zahl N \in \N existieren derart, dass

0< N< 1/q \leq 1,

 Widerspruch. Also ist e eine irrationale Zahl.

Um den Wert von e etwas präziser angeben zu können, betrachten wir die Ungleichung \eqref{eq:4}, welche

b\_n < e < b\_n + \frac{1}/{n!n}#

impliziert. Für n=10 ist

10!= 3 628 800, \frac{1}/{10!10}= \frac{1}/{36288000} \approx 0,00000003.

Weiter berechnet man

b\_{10} =1+1+ {1}/{2!}+ \dots + {1}/{10!} = 2,7182818

und erhält hieraus die Abschätzung

2,7182818 < e <2,71828183.

1.3.4 Definition:

Eine reelle Zahl x heißt transzendent, falls sie nicht Lösung einer algebraischen Gleichung endlichen Grades

a\_n x^n + \dots + a\_2 x^2+a\_1 x +a\_0=0 wobei n \geq 1,

mit ganzzahligen Koeffizienten a\_k ist. Anderenfalls heißt x algebraisch.

1.3.5 Bemerkung:

Jede transzendente Zahl ist irrational. Von Georg Cantor wurde 1874 bewiesen, dass es viel mehr transzendente als algebraische Zahlen gibt. Doch ist es ausgesprochen schwierig, von einer gegebenen Zahl nachzuweisen, dass sie transzendent ist. Einen ersten Beweis von der Transzendenz von e lieferte Charles Hermite 1873. Carl Luis Ferdinand von Lindemann bewies 1882, dass auch die Zahl \pi transzendent ist, was in letzter Instanz die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises zur Folge hat.

## 1.4 Klassen metrischer Räume

Im folgenden Abschnitt sollen verschiedene Klassen von metrischen Räumen besprochen werden.

### 1.4.1 Zusammenhängende Räume

1.4.1 Definition:

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge A \subset X heißt zusammenhängend, falls keine offenen Mengen U,V \subset X existieren derart, dass

U \cap V= \emptyset, A\subset U \cup V, A\cap U \not=\emptyset, A\cap V \not=\emptyset.

Insbesondere heißt (X,d) zusammenhängender metrischer Raum, falls keine offenen, nicht-leeren, disjunkten Teilmengen U und V existieren derart, dass

X=U\cup V.

1.4.2 Satz:

Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (X,d) ist genau dann zusammenhängend, falls der metrische Raum (A, d\_{|A} ) zusammenhängend ist.

Beweis:

Angenommen, A ist in X nicht zusammenhängend. Dann existieren offene Teilmengen U,V \subset X derart, dass

U \cap V= \emptyset, A\subset U \cup V, A\cap U \not=\emptyset, A\cap V \not=\emptyset.

Nach Satz 1.1.15 sind O\_1=A\cap U und O\_2=A\cap V offene Teilmengen in dem metrischen Raum (A,d\_{|A}). Da jedoch A=O\_1 \cup O\_2,

lässt sich A als Vereinigung zweier nicht-leerer, disjunkter, offener Teilmengen in A schreiben. Also ist der metrische Raum (A,d\_{|A}) nicht zusammenhängend. Dadurch wurde die Hinlänglichkeit der angegebenen Bedingung bewiesen, d. h. ist (A,d\_{|A}) zusammenhängend als metrischer Raum, so ist auch A als Teilmenge in X zusammenhängend.

Um die Notwendigkeit der angegebenen Bedingung einzusehen, nehmen wir an, dass (A,d\_{|A}) kein zusammenhängender metrischer Raum ist. Dann existieren

nicht-leere, disjunkte, offene Teilmengen O\_1, O\_2\subset A derart, dass A=O\_1 \cup O\_2. Für beliebige Punkte p \in O\_1 und q\in O\_2 existieren somit nach Definition jeweils \epsilon\_p, \epsilon\_q >0 derart, dass

 \label{eq:5}

 K\_A(p,\epsilon\_p)\subset O\_1, K\_A(q,\epsilon\_q) \subset O\_2.

 Wir betrachten alsdann die in X offenen Kugeln

 V\_p:=K\_X(p, \epsilon\_p/2) W\_q:=K\_X(q,\epsilon\_q/2).

Nach Satz 1.1.14 (3) sind

V:= cup\_{p \in O\_1}V\_p, W:= cup\_{q \in O\_2} W\_q

offene Mengen in X. Wir wollen im Folgenden zeigen, dass mittels der Mengen V und W die Menge A so zerlegt werden kann, dass A nicht zusammenhängend in X sein kann. Dazu bemerken wir als erstes, dass weder V\cap A noch W\cap A leer sind, da

O\_1 \subset V \cap A, O\_2 \subset W\cap A.

Dies impliziert, dass A=O\_1 \cup O\_2\subset (V\cap A) \cup (W\cap A)\subset (V\cup W) \cap A, mithin A\subset V\cup W. Um schließlich zu zeigen, dass V\cap W= \emptyset gilt, nehmen wir das Gegenteil an und wählen ein x \in V \cap W.

Dann existieren jeweils Kugeln V\_p und W\_q in X um Punkte p\in O\_1 bzw. q \in O\_2 mit x \in V\_p und x \in W\_q. Dies wiederum bedeutet, dass

d(p,q) \leq d(p,x)+ d(x,q) < \epsilon\_p/2 +\epsilon\_q/2\leq {\max{(\epsilon\_p,\epsilon\_q})}.

Sei nun etwa \epsilon\_p\leq \epsilon\_q. Da p in A liegt, impliziert \eqref{eq:5}, dass p \in O\_2. Dann aber wäre p \in O\_1 \cap O\_2\not=\emptyset, im Widerspruch zur Annahme, dass O\_1 und O\_2 disjunkt sind. Also muss V \cap W=\emptyset gelten. Also ist A nicht zusammenhängend in X. Damit ist alles bewiesen.

1.4.3 Satz:

Eine Teilmenge A\subset \R der reellen Zahlen ist genau dann zusammenhängend, falls für je zwei Punkte a\_1,a\_2 \in A auch das abgeschlossene Intervall [a\_1,a\_2] ganz in A enthalten ist.

Beweis:

Angenommen, in A\subset \R existieren zwei Punkte a\_1,a\_2 derart, dass das abgeschlossene Intervall [a\_1,a\_2] nicht in A liegt. Dann existiert ein x \in (a\_1,a\_2) dergestalt, dass x \not \in A. Wir definieren dann die Mengen

U:=(-\infty, x), V:=(x,\infty).

Offenbar sind U und V offen und disjunkt und es gilt zudem A\subset U\cup V=\R-\mklm{x}. Da a\_1\in U und a\_2 \in V, sind A\cap U und A\cap V auch nicht leer. Damit ist A nicht zusammenhängend in \R.

Sei nun umgekehrt A nicht zusammenhängend und U,V\subset \R offene, disjunkte Teilmengen, deren Durchschnitt mit A nicht leer ist und gelte A\subset U \cup V. Wir wählen nun Punkte a\_1 \in U\cap A und a\_2 \in V\cap A und nehmen an, dass etwa a\_1 <a\_2. Setze nun

x:=\sup \mklm{U \cap [a\_1,a\_2]} \in[a\_1,a\_2].

Wir zeigen, dass x\not \in A. Denn angenommen, x \in A. Dann muss x \in U oder x\in V gelten. Letzteres kann jedoch nicht der Fall sein, da U und V disjunkt sind und folglich U\cap [a\_1,a\_2] \subset \R-V gilt. Da \R-V abgeschlossen ist, muss folglich x \in \R-V gelten.

Demnach müsste x\in U sein. Da U offen ist, müsste dann ein \epsilon>0 existieren derart, dass K(x,\epsilon) =(x-\epsilon, x+\epsilon)\subset U. Folglich wäre

\label{eq:2007}

\sup \mklm{(x-\epsilon, x+\epsilon)\cap [a\_1,a\_2]}\leq\sup \mklm{U \cap [a\_1,a\_2]}= x.

Da x\in [a\_1,a\_2], ist \sup \mklm{(x-\epsilon, x+\epsilon)\cap [a\_1,a\_2]}=\min(x+\epsilon,a\_2). Wäre dieses Minimum gleich x+\epsilon, so würde dies sofort auf einen Widerspruch führen. Ist andererseits besagtes Minimum durch a\_2 gegeben, so folgt a\_2\leq x, da nach \eqref{eq:2007} x obere Schranke ist, und damit x=a\_2\in V, Widerspruch. Also gilt x \not\in A.

Als Konsequenz ergibt sich hieraus unmittelbar

1.4.4 Korollar:

Die einzigen zusammenhängenden Teilmengen von \R sind zusammen mit \R selbst die Intervalle

]-\infty, b[, ]-\infty, b], ]a,\infty[, [a,\infty[, ]a,b[, [a,b], ]a,b], [a,b[,

wobei a,b \in \R.

1.4.5 Satz:

Sei (X,d) ein metrischer Raum und A\subset X eine zusammenhängende Teilmenge. Dann ist jede Menge B \subset X mit A\subset B \subset \overline A ebenfalls zusammenhängend. Insbesondere ist der Abschluss einer zusammenhängenden Menge zusammenhängend.

Beweis:

Angenommen, B ist nicht zusammenhängend. Dann existierten offene, disjunkte Teilmengen U und V, die B zerlegen. Wegen A \subset B müsste dann auch A\subset U \cup V gelten.

Des Weiteren wären jeweils A\cap V und A\cap U nicht leer. Denn wäre A\cap U=\emptyset, also A \subset X-U, so müsste aufgrund der Abgeschlossenheit von X-U auch B\subset \overline A \subset X-U gelten. Dies jedoch ist ein Widerspruch zu der Tatsache, dass B\cap U\not=\emptyset. Entsprechend folgert man, dass A\cap V nicht leer sein kann. Dann aber würden die Mengen U und V auch A zerlegen, so dass A nicht zusammenhängend sein kann, Widerspruch.

1.4.6 Beispiel:

Wir betrachten die Funktion f(x)=\sin 1/x, x \in (0,\pi] und bezeichnen mit A=\mathrm{Graph} f den Graphen von f als Teilmenge in \R^2. Dann ist nach obigem Satz der Abschluss \overline A von A eine zusammenhängende Teilmenge des \R^2.

1.4.7 Satz:

Sei (X,d) ein metrischer Raum und A\_i, (i \in I), zusammenhängende Teilmengen in X mit nichtleerem Durchschnitt cap\_{i \in I} A\_i. Dann ist auch cup\_{i \in I} A\_i zusammenhängend.

Beweis:

Angenommen, A=cup\_{i \in I} A\_i ist nicht zusammenhängend. Es existieren also offene disjunkte Mengen U,V \subset X mit A \subset U \cup V und deren Schnitte mit A nicht leer sind. Für einen festen Index i\_0 ist somit A\_{i\_0} \subset U \cup V. Da die Menge A\_{i\_0} zusammenhängend ist, muss entweder A\_{i\_0} \cap U=\emptyset oder A\_{i\_0} \cap V=\emptyset gelten. Damit liegt also jeder Index i \in I in genau einer der beiden Mengen

I\_U:=\mklm{ i \in I: A\_i \cap U =\emptyset}, I\_V:=\mklm{ i \in I: A\_i \cap V =\emptyset}.

Definiert man alsdann

A\_U:= cup \_{i \in I\_U} A\_i\subset V, A\_V:= cup \_{i \in I\_V} A\_i\subset U,

so ist A=A\_U\cup A\_V\subset U \cup V sowie A\_U \cap A\_V=\emptyset. Sind nun I\_U und I\_V beide nicht leer, so existieren Indizes i\_1 und i\_2 derart, dass

A\_{i\_1} \cap U = \emptyset, A\_{i\_2} \cap V = \emptyset,

so dass A\_{i\_1}\cap A\_{i\_2} \subset A\_U \cap A\_V=\emptyset. Da nach Voraussetzung jedoch A\_{i\_1}\cap A\_{i\_2}\not=\emptyset, ergibt sich hieraus ein Widerspruch. Also kann nur I\_U oder I\_V leer sein. Gilt aber nun beispielsweise I\_U=\emptyset, so ist I\_V=I, mithin

 A\_i \cap V = \emptyset \forall i \in I

und damit auch A\cap V=\emptyset. Dies aber ist ein Widerspruch zu der Tatsache, dass A \cap V\not=\emptyset. Somit ist A zusammenhängend.

1.4.8 Definition:

Sei p\in X ein Punkt in einem metrischen Raum (X,d) und \mathcal{C}(p) die Familie aller zusammenhängenden Teilmengen von X, welche p enthalten. Man definiert dann

C(p):= cup\_{ A \in \mathcal{C}(p)} A.

Nach dem vorigen Satz ist C(p) zusammenhängend. Weiter ist C(p) die größte zusammenhängende Teilmenge von X, die p enthält und wird Zusammenhangskomponente durch p genannt.

Insgesamt zerfällt X in seine Zusammenhangskomponenten gemäß

X= cup \_{p} C(p).

Wie das letzte Beispiel zeigt, sind die Zusammenhangskomponenten eines metrischen Raumes im Allgemeinen nicht offen. Jedoch gilt folgender

1.4.9 Satz:

Jede Zusammenhangskomponente eines metrischen Raumes (X,d) ist eine abgeschlossene Teilmenge.

Beweis:

Wir betrachten einen Punkt p \in X und dessen Zusammenhangskomponente C(p). Nach Satz 1.4.5 ist auch dessen Abschluss \overline{C(p)} zusammenhängend und enthält offenbar p. Damit ist \overline{C(p)} \subset C(p) und somit \overline{C(p)}= C(p).

### 1.4.2 Vollständige metrische Räume

Zur Einführung bemerken wir zunächst folgenden Sachverhalt.

1.4.10 Satz:

Sei x\_n \to x eine konvergente Folge in einem metrischen Raum X. Dann gilt:

\label{eq:CF}

\forall \epsilon >0 \exists N \in \N: d(x\_n, x\_m) <\epsilon \forall n,m\geq N (Cauchy-Bedingung).

Beweis:

Sei \epsilon>0 gegeben und N\geq \N derart, dass d(x\_n,x)<\epsilon/2 für alle n \geq N. Mit der Dreiecksungleichung folgert man dann

d(x\_n,x\_m) \leq d(x\_n,x)+ d(x\_m,x) < \epsilon \forall n, m \geq N.

1.4.11 Definition:

Eine Folge \mklm{x\_n} mit der Eigenschaft \eqref{eq:CF} heißt Cauchy--Folge.

Damit ist jede konvergente Folge eine Cauchy--Folge. Des Weiteren ist jede Cauchy--Folge beschränkt (Rechenaufgabe). Das folgende Beispiel zeigt jedoch, dass nicht jede Cauchy--Folge konvergieren muss.

1.4.12 Beispiel:

Sei X das Intervall (0,1) und x\_n =1/n. Offenbar ist \mklm{x\_n} in X nicht konvergent, jedoch berechnet man

d(x\_n,x\_m)= | 1/n - 1/m| = | \frac{n-m}/{nm}# | \leq \frac{1}/{\min(n,m)}#,

so dass \mklm{x\_n} eine Cauchy--Folge darstellt.

Damit gelangen wir zu folgender

1.4.13 Definition:

Ein metrischer Raum, in welchem jede Cauchy--Folge konvergiert, heißt vollständiger metrischer Raum.

1.4.14 Satz:

\R ist ein vollständiger metrischer Raum.

Beweis:

Wir betrachten eine Cauchy--Folge reeller Zahlen \mklm{x\_n}. Für jedes \epsilon>0 existiert also ein N\in \N, so dass

|x\_n-x\_m| < \epsilon/2 \forall n,m \geq N.

Da besagte Folge beschränkt ist, besitzt sie nach dem Satz von Bolzano--Weierstrass eine Teilfolge \mklm{x\_{n\_k}}, die gegen ein x\in \R konvergiert. Damit existiert zu jedem \epsilon>0 ein K \in \N mit

|x\_{n\_k} -x | < \epsilon/2 \forall k \geq K.

Sei nun \epsilon>0 gegeben und N und K wie oben. Wähle alsdann ein x\_{n\_k} mit k\geq K und n\_k \geq N. Dann ist

|x-x\_n| \leq |x\_n-x\_{n\_k}| + |x\_{n\_k}-x| < \epsilon/2 + \epsilon/2 =\epsilon \forall n \geq N.

 Wir betrachten als nächstes das kartesische Produkt von vollständigen metrischen Räumen.

1.4.15 Satz:

Das kartesische Produkt einer endlichen Anzahl von kartesischen Räumen ist wieder ein vollständiger metrischer Raum.

 Beweis:

 Übungsaufgabe!

Der letzte Satz impliziert insbesondere, dass \C\simeq \R^2, \rn und \C^n vollständige metrische Räume sind.

1.4.16 Satz:

Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und A\subset X eine abgeschlossene Teilmenge. Dann ist auch (A,d\_{|A}) ein vollständiger metrischer Raum.

Beweis:

Wir betrachten eine Cauchy--Folge \mklm{a\_n} in A. Diese ist auch eine Cauchy--Folge in X. Da X vollständig ist, gilt a\_n \to x für ein x \in X. Da A abgeschlossen ist, liegt der Grenzwert jeder konvergenten Folge in A ebenfalls in A. Damit gilt x \in A.

1.4.17 Definition:

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Der Durchmesser einer Teilmenge A\subset X ist dann gegeben durch

\diam(A):=\sup\_{a\_1,a\_2 \in A} d(a\_1,a\_2)=\sup \mklm{ d(a\_1,a\_2): {a\_1,a\_2 \in A}}.

Wir kommen nun zu einigen wichtigen Strukturaussagen über metrische Räume.

1.4.18 Satz: Erster Satz von Cantor (für vollständige metrische Räume)

Sei F\_1 \supset F\_2 \supset F\_3 \supset \dots eine fallende Folge nichtleerer abgeschlossener Teilmengen in einem vollständigen metrischen Raum (X,d) und gelte \lim\_{n \to \infty} \diam(F\_n)=0. Dann besteht der Durchschnitt aller Teilmengen F\_n aus genau einem Punkt.

Beweis:

Zum Beweis wählen wir in jeder Menge F\_n einen Punkt x\_n und zeigen zunächst, dass \mklm{x\_n} eine Cauchy--Folge ist. Es ist x\_n,x\_m \in F\_{\min(n,m)}, da die Folge der F\_n fallend ist. Sei nun \epsilon>0 gegeben. Nach Voraussetzung existiert dann ein N \in \N mit \diam (F\_n) < \epsilon für alle n \geq N. Damit aber ist

d(x\_n,x\_m) \leq \diam (F\_{\min(n,m)}) < \epsilon \forall n,m \geq N.

Mithin ist \mklm{x\_n} eine Cauchy--Folge und infolge der Vollständigkeit von X existiert ein x \in X mit x\_n \to x. Nun gilt aber für jedes n

x\_n,x\_{n+1},x\_{n+2}, \dots \in F\_n.

Da die Teilmengen F\_n abgeschlossen sind, muss somit der Grenzwert x in jeder der Mengen F\_n liegen und damit auch in deren Durchschnitt.

Würde jetzt ein weiterer Punkt \tilde x in dem Durchschnitt cap\_{n \in \N} F\_n liegen, so müsste auch er in jeder der Teilmengen F\_n liegen und somit

d(x,\tilde x) \leq \diam (F\_n)

für alle n erfüllen. Lässt man nun n\to \infty gehen, so folgt

d(x,\tilde x) \leq \lim\_{n \to \infty} \diam (F\_n)=0

und damit d(x,\tilde x)=0.

1.4.19 Bemerkung:

Die Voraussetzung, dass die Durchmesser der betrachteten Folge von Teilmengen gegen null tendieren, ist wesentlich für die Richtigkeit der Aussage. Sei etwa X=\R und F\_n=\mklm{ x \in \R: x \geq n}. Dann bilden die F\_n eine fallende Folge abgeschlossener Teilmengen mit Durchmesser \infty, deren Durchschnitt jedoch leer ist.

Aus dem letzten Satz ergibt sich insbesondere das

Prinzip der Intervallschachtelung: Sei I\_n=[a\_n,b\_n] eine fallende Folge abgeschlossener Intervalle in dem nach Satz 1.4.14 vollständigen metrischen Raum \R und gelte \diam (I\_n)=b\_n-a\_n \to 0. Dann besteht der Durchschnitt der Intervalle I\_n genau aus einer reellen Zahl.

Ein zentraler Satz aus der Topologie ist der Satz von Baire.

1.4.20 Satz: Satz von Baire

Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und U\_1,U\_2,\dots eine Folge offener und dichter Teilmengen. Dann ist der Durchschnitt cap\_{i \in \N} U\_i ebenfalls eine dichte Teilmenge.

Beweis:

Wir beweisen, dass X-cap\_{i \in \N} U\_i keine Kugel enthalten kann. Sei mithin K(x,R) eine Kugel um x \in X vom Radius R>0. Da U\_1 dicht ist, gilt K(x,R) \not\subset X-U\_1.

Demnach existiert ein Punkt x\_1 \in K(x,R) mit x\_1 \in U\_1. Da K(x,R) \cap U\_1 als Durchschnitt zweier offener Mengen offen ist, existiert ein 0< \epsilon\_1<1 derart, dass

\overline{K(x\_1,\epsilon\_1)}\subset K(x,R) \cap U\_1.

Betrachtet man als nächstes die Kugel K(x\_1,\epsilon\_1), so kann, da U\_2 dicht ist, wiederum K(x\_1,\epsilon\_1) nicht in X-U\_2 liegen. Abermals muss somit ein x\_2\in K(x\_1,\epsilon\_1)\cap U\_2 existieren, sowie ein 0< \epsilon\_2 < 1/2 mit

\overline{K(x\_2,\epsilon\_2)}\subset K(x\_1,\epsilon\_1) \cap U\_2.

Damit erhalten wir eine fallende Folge von Kugeln dergestalt, dass \diam K(x\_i,\epsilon\_i) \to 0 und \overline{K(x\_i,\epsilon\_i)} \subset U\_i gilt. Nach dem ersten Satz von Cantor existiert dann ein Punkt y \in X mit

cap\_{i \in \N} \overline{K(x\_i,\epsilon\_i)}=\mklm{y}.

Offenbar ist y \in K(x,R). Weiterhin ist nach Konstruktion y \in U\_i für alle i. Dies aber bedeutet, dass die anfangs gegebene Kugel K(x,R) nicht vollständig in X-\cap\_{i\in \N} U\_i enthalten sein kann und wir erhalten die Behauptung.

1.4.21 Bemerkung:

Sind im obigen Satz die Mengen U\_i nicht offen und dicht, so ist deren Durchschnitt nicht notwendig dicht. So sind etwa \R vollständig und U\_{2i}=\Q, U\_{2i+1}=\R-\Q, i \in \N, sämtlich dichte Teilmengen, deren Durchschnitt jedoch leer ist.

1.4.22 Satz: Fixpunktsatz von Banach

Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und f:X \rightarrow X eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass

d(f(x),f(y)) \leq \alpha d(x,y) \forall x,y \in X,

für ein 0<\alpha <1. Dann existiert genau ein Punkt x\_0\in X mit f(x\_0)=x\_0. Der Punkt x\_0 heißt { Fixpunkt der kontrahierenden Abbildung f}.

Beweis:

Wir wollen zunächst einsehen, dass es höchstens einen Fixpunkt geben kann. Denn angenommen, f besitzt zwei Fixpunkte x\_0,y\_0. Dann ist

d(x\_0,y\_0)=d(f(x\_0), f(y\_0)) \leq \alpha d(x\_0,y\_0).

Da jedoch \alpha <1 ist, muss zwingend d(x\_0,y\_0)=0 gelten. Um die Existenz des Fixpunktes zu beweisen, betrachten wir einen beliebigen Punkt x \in X und die entsprechende Folge von Punkten x\_1=f(x), x\_2=f(x\_1), usw. Man berechnet dann

d(x\_n,x\_{n+1}) = d(f^{n+1}(x),f^n(x)) \leq \alpha ^n d(x\_1,x).

Hieraus ergibt sich für n>m mittels der endlichen geometrischen Reihe

d(x\_n,x\_m) & \leq d(x\_n,x\_{n-1})+ d(x\_{n-1}, x\_{n-2})+ \cdots + d(x\_{m+1},x\_m)

\leq (\alpha^{n-1}+ \alpha^{n-2}+ \cdots + \alpha^m) d(x\_1,x)

\leq \alpha^m ( 1+ \alpha + \cdots +\alpha ^{n-1-m}) d(x\_1,x)

\leq \alpha^m \frac{1-\alpha^{n-m}}/{1-\alpha}# d(x\_1,x).

Wegen 0<\alpha <1 schließen wir hieraus, dass x\_n eine Cauchy--Folge in X ist. Aufgrund der Vollständigkeit von X existiert demnach ein x\_0\in X mit x\_n \to x\_0. Der Punkt x\_0 ist der gesuchte Fixpunkt von f. Tatsächlich ist für beliebiges n

d(f(x\_0),x\_0) \leq d(f(x\_0),x\_n) + d(x\_n,x\_0) \leq \alpha d(x\_0,x\_{n-1})+ d(x\_n,x\_0).

Im Limes n\to \infty ergibt sich hieraus

0 \leq d(f(x\_0),x\_0) \leq 0

und damit f(x\_0)=x\_0.

### 1.4.3 Kompakte metrische Räume

Wir kommen nun zu einer weiteren wichtigen Klasse von metrischen Räumen. Hierzu erinnern wir zunächst an den Satz von Bolzano—Weierstraß, welcher besagt, dass jede beschränkte Folge reeller Zahlen eine konvergente Teilfolge besitzt. In Anlehnung an diesen Satz definiert man nun allgemein

1.4.23 Definition:

Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (X,d) heißt kompakt, falls jede Folge in A eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert in A liegt. Insbesondere heißt X kompakter metrischer Raum, falls jede Folge in X eine konvergente Teilfolge besitzt.

1.4.24 Satz: (Bolzano--Weierstrass)

Ist A \subset X kompakt, so ist A abgeschlossen und beschränkt.

Beweis:

Angenommen, A ist nicht abgeschlossen. Dann würde eine konvergente Folge \mklm{a\_n} in A existieren, deren Grenzwert a nicht in A liegt. Da jedoch keine Teilfolge gegen einen von a verschiedenen Wert konvergieren kann, kann A auch nicht kompakt sein. Wäre nun A nicht beschränkt, so würde für jedes beliebige x \in X und M>0 stets A\not\subset K(x,M) gelten. Für ein festes x würden somit Punkte a\_i \in A existieren mit d(x,a\_i) \geq i. Die Folge \mklm{a\_i} wäre dann nicht beschränkt und jede ihrer Teilfolgen ebenfalls nicht. Nach Proposition 1.2.4 kann keine dieser Teilfolgen konvergieren, so dass A nicht kompakt wäre. Damit ist die Behauptung bewiesen.

1.4.25 Bemerkung:

Die Umkehrung der obigen Behauptung gilt im allgemeinen nicht. Sei so etwa X= \mklm{p\_1,p\_2, \dots } eine abzählbare Menge versehen mit der diskreten Metrik. Dann ist die Menge \mklm{p\_2,p\_4, \dots} abgeschlossen und beschränkt, jedoch nicht kompakt. Ähnliche Beispiele findet man in unendlich-dimensionalen Räumen.

1.4.26 Proposition:

Das kartesische Produkt endlich-vieler kompakter metrischer Räume (X\_i,d\_i) ist kompakt.

Beweis:

Der notationellen Einfachheit halber zeigen wir die Behauptung lediglich für X\_1\times X\_2. Sei also z\_n=(x\_n,y\_n) \in X\_1 \times X\_2 eine beliebige Folge. Da X\_1 kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge \mklm{x\_{n\_k}} in X\_1 mit x\_{n\_k} \to x\in X\_1. Da andererseits auch X\_2 kompakt ist, existiert wiederum eine Teilfolge \mklm{y\_{n\_{k\_l}}} von \mklm{y\_{n\_k}}, welche gegen ein y \in X\_2 konvergiert. Dann aber gilt

({x\_{n\_{k\_l}}, y\_{n\_{k\_l}}}) \to (x,y)

in X=X\_1\times X\_2.

1.4.27 Lemma:

Sei (X,d) ein kompakter metrischer Raum. Dann ist jede abgeschlossene Teilmenge A\subset X kompakt.

Beweis:

Sei A\subset X eine abgeschlossene Teilmenge und \mklm{a\_n} eine Folge in A. Da X kompakt ist, besitzt \mklm{a\_n} als Folge in X eine konvergente Teilfolge \mklm{a\_{n\_k}}, welche gegen ein Element x \in X konvergiert. Die Abgeschlossenheit von A impliziert dann nach Korollar 1.2.8, dass x \in A gilt. Also ist A kompakt.

Für Teilmengen des euklidischen Raumes gilt auch die Umkehrung von Satz 1.4.24.

1.4.28 Satz:

Eine Teilmenge A\subset \R^n ist genau dann kompakt, falls sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Beweis:

Nach Satz 1.4.24 ist nur die Hinlänglichkeit der angegebenen Bedingung zu zeigen. Sei also A\subset \R^n eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge. Dann existiert ein Quader W=[a\_1,b\_1] \times \cdots \times [a\_n,b\_n] mit A\subset W. Wir zeigen, dass abgeschlossene Intervalle [a,b]\subset \R kompakte metrische Räume sind. Sei so \mklm{x\_n} eine beliebige Folge in [a,b]. Da \mklm{x\_n} beschränkt ist, existiert nach dem Satz von Bolzano--Weierstrass eine konvergente Teilfolge, welche infolge der Abgeschlossenheit von [a,b] gegen einen Grenzwert x \in [a,b] konvergieren muss. Damit ist [a,b] kompakt. Proposition 1.4.26 impliziert dann, dass auch W ein kompakter metrischer Raum ist und Lemma 1.4.27, dass A kompakt ist.

1.4.29 Beispiel: Abgeschlossene Intervalle sind kompakte Teilmengen von \R.

1.4.30 Beispiel: Beispiele für zusammenhängende und kompakte Teilmengen in \rn sind:

Aufzählungsanfang

 Die n-dimensionale Sphäre S^n(r):=\mklm{ x \in \R^{n+1}: \norm{x} =r}, r>0.

 Der n-dimensionale Torus T^n:=S^1 \times\dots \times S^1.

 Die n-dimensionale Kreisscheibe D^n(r):=\mklm{x \in \rn: \norm{x}\leq r}.

Aufzählungsende

1.4.31 Satz:

Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig.

Beweis:

Sei (X,d) ein kompakter metrischer Raum und \mklm{x\_n} eine Cauchy--Folge in demselben. Somit existiert zu jedem gegebenen \epsilon>0 ein N \in \N mit

d(x\_n,x\_m) < \epsilon/2 \forall n,m \geq N.

Nach Voraussetzung besitzt \mklm{x\_n} eine konvergente Teilfolge x\_{n\_k}\to x. Für gegebenes \epsilon>0 existiert also ein K \in \N mit

d(x\_{n\_k},x) < \epsilon/2 \forall k \geq K.

Dann aber muss auch x\_n \to x gelten. Denn sei \epsilon >0 fest, sowie k\geq K derart, dass n\_k\geq N. Dann ist

d(x\_n,x) \leq d(x\_n,x\_{n\_k}) + d(x\_{n\_k},x)<\epsilon \forall n \geq N,

und die Behauptung folgt.

1.4.32 Bemerkung:

Die Umkehrung des vorigen Satzes gilt nicht.

Wir beweisen nun einen zum ersten Satz von Cantor analogen Satz für kompakte metrische Räume. Dabei wird keine Voraussetzung an den Durchmesser der betrachteten Mengen benötigt, jedoch kann der entsprechende Durchschnitt dafür mehrere Elemente enthalten.

1.4.33 Satz: Zweiter Satz von Cantor (für kompakte metrische Räume)

Sei (X,d) ein kompakter metrischer Raum und F\_1 \supset F\_2\supset \dots eine fallende Folge nichtleerer abgeschlossener Teilmengen. Dann ist der Durchschnitt cap\_{i=1}^\infty F\_i nicht leer.

Beweis:

Wir wählen für jedes i ein x\_i \in F\_i. Da X kompakt ist, muss die so entstehende Folge \mklm{x\_i} eine Teilfolge \mklm{x\_{i\_j}} enthalten, welche gegen ein x \in X konvergiert. Nun liegen ab der i\_j-ten Stelle alle Glieder dieser Teilfolge in F\_{i\_j}. Da F\_{i\_j} abgeschlossen ist, gilt somit x \in F\_{i\_j} \subset \dots F\_2 \subset F\_1. Also ist x \in F\_i für alle i und somit x\in cap\_{i=1}^\infty F\_i.

Eine wichtige Eigenschaft kompakter Räume wird in folgendem Satz beschrieben.

1.4.34 Satz: Hausdorff--Eigenschaft kompakter metrischer Räume

Sei (X,d) ein kompakter metrischer Raum. Dann existiert für jedes \epsilon>0 ein k \in \N und Punkte p\_1,\dots, p\_k \in X mit cup\_{i=1}^k K(p\_i,\epsilon)=X.

Beweis:

Wir nehmen an, dass der metrische Raum (X,d) nicht die Hausdorff--Eigenschaft besitzt. Damit gilt

\exists \epsilon>0: \forall k \in \N \forall p\_1,\dots,p\_k \in X: cup\_{i=1}^k K(p\_i,\epsilon)\not=X.

Insbesondere wäre für dieses \epsilon>0 und einen beliebigen Punkt x\_1 somit K(x\_1,\epsilon)\not=X, so dass ein x\_2\not \in K(x\_1,\epsilon) existiert mit d(x\_1,x\_2) \geq \epsilon>0. Da wiederum K(x\_1,\epsilon) \cup K(x\_2,\epsilon)\not=X, existiert weiter ein Punkt x\_3 mit d(x\_1,x\_3) \geq \epsilon, d(x\_2,x\_3) \geq \epsilon. Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man eine Punktfolge x\_1, x\_2,x\_3,\dots, deren Glieder paarweise mindestens den Abstand \epsilon>0 haben. Damit kann die Folge \mklm{x\_n} keine konvergente Teilfolge besitzen und X nicht kompakt sein. Wir haben somit gezeigt, dass jeder kompakte metrische Raum notwendig die Hausdorff--Eigenschaft haben muss.

1.4.35 Proposition:

Ein metrischer Raum ist genau dann kompakt, falls er vollständig ist und die Hausdorff--Eigenschaft besitzt.

Beweis:

Übungsaufgabe!

Wir kommen nun zu der zentralen Eigenschaft kompakter metrischer Räume, welche in der allgemeinen Topologie, wo man zwar über den Begriff einer offenen Menge, jedoch nicht über den Begriff eines Abstandes verfügt, zur Definition von kompakten Räumen herangezogen wird. Der Begriff der Kompaktheit ist somit ein topologischer Begriff und voriger Satz eine Antizipation dieses Sachverhaltes.

1.4.36 Definition:

Unter einer offenen Überdeckung eines metrischen Raumes (X,d) versteht man eine Familie \mathcal{U}= \mklm{U\_i}\_{i \in I} offener Mengen dergestalt, dass X=cup\_{i \in I} U\_i.

1.4.37 Satz: [Satz von Borel--Lebesgue]

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann ist X genau dann kompakt, falls jede offene Überdeckung \mathcal{U}= \mklm{U\_i}\_{i \in I} eine endliche Teilüberdeckung \mklm{U\_{n\_1}, \dots, U\_{n\_k}} besitzt.

Beweis:

Wir beweisen als erstes, dass die Überdeckungseigenschaft hinreichend ist. Wir nehmen somit an, dass jede Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Sei weiter \mklm{p\_1,p\_2,\dots } eine beliebige Punktfolge in X und setze

F\_n:= \overline{\mklm{p\_{n+1},p\_{n+2}, \dots }}.

Da F\_n abgeschlossen ist, ist U\_n:= X-F\_n offen. Da die F\_n eine fallende Folge bilden, stellt U\_1 \subset U\_2\subset U\_3\dots eine wachsende Folge offener Mengen dar. Würde nun X=cup\_{i=1}^\infty U\_i gelten, so müssten nach der Borel--Lebesgue--Eigenschaft endlich viele Indizes i\_1< \dots < i\_k existieren derart, dass

 X=U\_{i\_1} \cup \dots \cup U\_{i\_k}=U\_{i\_k}=X-F\_{i\_k}.

Da F\_{i\_k} nicht leer ist, erhalten wir einen Widerspruch. Damit kann \mklm{U\_i}\_{i=1}^\infty keine Überdeckung von X sein, so dass

X-cap \_{i=1}^\infty F\_i =cup\_{i=1}^\infty (X-F\_i) = cup\_{i=1}^\infty U\_i \not=X.

Mithin ist cap \_{i=1}^\infty F\_i\not=\emptyset und wir können einen Punkt p in diesem Durchschnitt wählen. Nun bedeutet p \in F\_1=\overline{\mklm{p\_2,p\_3,\dots}}, dass ein Punkt p\_{n\_1} existieren muss mit d(p,p\_{n\_1})< 1. Weiter impliziert p \in F\_{n\_1}=\overline{\mklm{p\_{n\_1+1},p\_{n\_1+2},\dots}}, dass ein Punkt p\_{n\_2} existiert mit n\_1<n\_2 und d(p, p\_{n\_2})< 1/2, usw. Insgesamt erhalten wir mittels dieser Konstruktion eine Teilfolge \mklm{p\_{n\_k}}, die gegen p\in X konvergiert. Somit enthält jede Folge in X eine konvergente Teilfolge und X ist kompakt.

Um die Notwendigkeit der Überdeckungseigenschaft einzusehen, bedarf es mehrerer Schritte.

1.Schritt.

Jeder kompakte metrische Raum (X,d) besitzt eine abzählbar dichte Teilmenge.

Nach Satz 1.4.34 besitzt X die Hausdorff--Eigenschaft. Insbesondere existiert also zu jedem \epsilon=1/N ein k\_N\in \N und Punkte p\_1^N,\dots, p\_{k\_N}^N\in X dergestalt, dass

X=cup\_{i=1}^{k\_N} K(p\_i^N,1/N).

Dies jedoch bedeutet, dass die abzählbare Menge

\label{eq:7}

A=cup\_{N=1}^\infty cup\_{i=1}^{k\_N} \mklm{p\_i^N}

dicht in X liegt. Tatsächlich ist \overline A=X. Denn sei x\in X ein beliebiger Punkt. Dann existiert für jedes N eine Kugel K(p\_i^N,1/N), welche x enthält. Die Mittelpunkte a\_N:=p^N\_i erfüllen also d(a\_N,x) < 1/N und stellen somit eine Folge in A dar, welche gegen x konvergiert. Mit Satz 1.2.7 folgt, dass x \in \overline A, und damit die Behauptung des 1. Schrittes.

2. Schritt

Jede offene Überdeckung eines kompakten metrischen Raumes (X,d) besitzt eine abzählbare Teilüberdeckung.

Sei A\subset X die in \eqref{eq:7} eingeführte, abzählbar dichte Teilmenge und \mathcal{U}=\mklm{U\_i}\_{i \in I} eine offene Überdeckung von X. Wir definieren dann die abzählbare Menge

\Lambda=\mklm{(a,r) \in A\times \Q\_+: { K(a,r) ist mindestens in einer Menge U\_i enthalten}}.

Wähle nun zu jedem (a,r) \in \Lambda genau einen Index i\_{a,r} \in I mit K(a,r) \subset U\_{i\_{a,r}}. Dann ist

\mathcal{U}^\ast=\mklm{U\_{i\_{a,r}}}\_{(a,r) \in \Lambda}

eine abzählbare Teilfamilie von \mathcal{U}=\mklm{U\_i}\_{i \in I}. Wir zeigen, dass \mathcal{U}^\ast eine Überdeckung von X ist, also

X=cup\_{(a,r) \in \Lambda} U\_{i\_{a,r}}

gelten muss. Hierzu betrachten wir einen beliebigen Punkt x \in X, welcher nach Voraussetzung in einer gewissen Menge U\_i liege. Da U\_i offen ist, existiert ein \epsilon-Kugel um x mit K(x,\epsilon) \subset U\_i. Weiter enthält X-A keine Kugeln, da A dicht in X liegt. Insbesondere ist K(x,\epsilon/4) nicht vollständig in X-A enthalten. Folglich existiert ein a \in A mit a \in K(x,\epsilon/4). Wir wählen nun ein rationale Zahl r \in \Q mit \epsilon/4 < r< \epsilon/2. Dann gilt x \in K(a,r). Nun aber ist

K(a,r) \subset K(x,\epsilon) infolge von

d(x,y) \leq d(x,a)+d(a,y) < \epsilon/2+ \epsilon/2 =\epsilon, y \in K(a,r),

und damit insgesamt K(a,r) \subset K(x,\epsilon)\subset U\_i. Nach Definition der Menge \Lambda ist somit (a,r) \in \Lambda. Dann aber folgt x \in K(a,r)\subset U\_{i\_{a,r}} und damit x \in cup\_{(a,r) \in \Lambda} U\_{i\_{a,r}}. Damit ist die Aussage des 2. Schrittes bewiesen.

3. Schritt

Jede offene Überdeckung eines kompakten metrischen Raumes (X,d) besitzt eine endliche Teilüberdeckung.

Sei \mathcal{U}=\mklm{U\_i}\_{i \in I} eine offene Überdeckung von X. Nach dem 2. Schritt existiert zunächst eine abzählbare Teilüberdeckung \mathcal{U}'=\mklm{U\_{i\_1}, U\_{i\_2},\dots}. Wir betrachten alsdann die fallende Folge abgeschlossener Teilmengen

F\_n:=X-(U\_{i\_1} \cup\dots \cup U\_{i\_n}), F\_1 \supset F\_2 \supset \dots .

Angenommen, F\_n\not=\emptyset für alle n \in \N. Dann würde nach Satz 1.4.33 (2. Satz von Cantor) der Durchschnitt cap\_{n \in \N} F\_n nicht leer sein. Nun aber ist

cap\_{n \in \N} F\_n

=cap\_{n \in \N} [ X-(U\_{i\_1} \cup\dots \cup U\_{i\_n}) ]

= X- cup\_{n \in \N} (U\_{i\_1} \cup\dots \cup U\_{i\_n})

= X- cup\_{j \in \N} U\_{i\_j} =\emptyset,

da \mathcal{U}' eine Überdeckung von X ist. Demnach existiert ein n \in \N derart, dass F\_n =\emptyset, so dass

X=U\_{i\_1} \cup\dots \cup U\_{i\_n}.

Dies ist die gesuchte endliche Teilüberdeckung von X, womit der Beweis des Satzes von Borel--Lebesgue abgeschlossen ist.

Als Spezialfall des Satzes von Borel--Lebesgue erhält man das folgende klassische Resultat:

1.4.38 Korollar:

Sei X=\R und [a,b] ein beliebiges abgeschlossenes Intervall. Ist \mathcal{U}=\mklm{(a\_i,b\_i)}\_{i \in I} eine Überdeckung von [a,b] durch offene Intervalle in \R, so genügen bereits endlich viele dieser Intervalle, um [a,b] zu überdecken.

1.4.39 Beispiel: Sei X=(0,1) und definere für a \in (0,1) die Mengen U\_a=B(a, \min(a/2,(1-a)/2)).

Dann besitzt X=cup\_{a \in (0,1)} U\_a keine endliche Teilüberdeckung.

Als weitere Konsequenz des Satzes von Borel--Lebesgue erhalten wir folgende Aussage. Sie ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Cantor.

1.4.40 Satz: Riesz

Sei (X,d) ein kompakter metrischer Raum und \mathcal{F}=\mklm{F\_i}\_{i \in I} eine Familie abgeschlossener Mengen mit der Eigenschaft, dass

F\_{i\_1} \cap F\_{i\_2} \dots \cap F\_{i\_k}\not=\emptyset

für jede beliebige endliche Indexmenge \mklm{i\_1,\dots,i\_k}\subset I. Dann gilt bereits cap\_{i \in I} F\_i \not=\emptyset.

Beweis:

Angenommen, \cap\_{i \in I} F\_i=\emptyset. Dann müsste X=\cup\_{i \in I} U\_i gelten, wobei wir U\_i=X-F\_i setzten. Wählt man nun nach dem Satz von Borel--Lebesgue eine endliche Teilüberdeckung \mklm{U\_{i\_1},\dots,U\_{i\_k}} von X, so erhielte man

 X=cup\_{j=1}^k U\_{i\_j}

 und damit cap\_{j=1}^k F\_{i\_j}=\emptyset, im Widerspruch zur Voraussetzung.

## 1.5 Reihen

Im folgenden Abschnitt beschäftigen wir uns mit einem besonderen Typ von Folgen.

### 1.5.1 Allgemeine Eigenschaften

Sei \mklm{x\_n} eine Folge von Punkten in \K^d=\R^d oder \C^d und betrachte die Partialsummen s\_n=x\_1 +\dots +x\_n.

Der formale Ausdruck

\sum\_{k=1}^\infty x\_k = x\_1+x\_2+x\_3 + \cdots

wird Reihe genannt. Konvergiert die Folge der Partialsummen s\_n gegen ein s\in \K^d, so schreibt man

\sum\_{k=1}^\infty x\_k = \lim\_{n \to \infty} \sum\_{k=1}^n x\_k= \lim\_{n \to \infty} s\_n =s

und spricht in diesem Fall von einer {konvergenten Reihe}. Ein erstes Kriterium für die Konvergenz von Reihen liefert folgender

1.5.1 Satz: [Cauchy–Kriterium]

Die Reihe \sum\_{k=1}^\infty x\_k ist konvergent genau dann, falls für jedes \epsilon>0 ein N \in \N existiert derart, dass

|x\_n+ \cdots + x\_m| < \epsilon \forall m\geq n \geq N.

Beweis:

Sei s\_n=x\_1 +\dots +x\_n. Da \K^d vollständig ist, ist die Folge der Partialsummen s\_n genau dann konvergent, falls sie eine Cauchy–Folge ist. Da jedoch für m \geq n die Gleichheit s\_m-s\_{n-1}=x\_m+ x\_{m-1}+\dots+ x\_n gilt, folgt insgesamt die Behauptung.

1.5.2 Korollar:

Ist \sum\_{k=1}^\infty x\_k konvergent, so gilt \lim\_{k\to \infty} x\_n =0.

Beweis:

Tatsächlich existiert nach dem Cauchy–Kriterium für jedes \epsilon>0 ein N derart, dass

|x\_n|<\epsilon \forall n \geq N.

1.5.3 Bemerkung:

Die Umkehrung des Korollars gilt im Allgemeinen nicht. Wir betrachten so etwa die {harmonische Reihe},

\sum\_{k=1}^\infty \frac 1k.

deren Glieder offenbar gegen null konvergieren. Die Folge der Partialsummen ist jedoch nicht konvergent. So ist etwa

\frac 13+ \frac 14 > \frac 14+ \frac 14 =\frac 12, \frac 15+\frac 16+\frac 17+\frac 18 >\frac 48=\frac 12,

und generell

\frac{1}/{2^n+1}# + \frac{1}/{2^n+2}# + \dots + \frac{1}/{2^{n+1}}# >\frac 12.

Für die Partialsummen ergibt sich dann

s\_{2^{n+1}} - s\_{2^n} > \frac 12, s\_{2^{n+1}} >\frac n2.

Damit kann die harmonische Reihe nicht konvergieren.

1.5.4 Proposition:

Sind \sum\_{n=1}^\infty x\_n und \sum\_{n=1}^\infty y\_n zwei konvergente Reihen, so ist die Reihe

\sum\_{n=1}^\infty z\_n=\sum\_{n=1}^\infty(x\_n+y\_n)

ebenfalls konvergent.

Beweis:

Wir bezeichnen mit s\_n^x, s\_n^y und s\_n^z die jeweiligen Partialsummen der betrachteten Reihen. Da offenbar s\_n^z=s\_n^x+s\_n^y gilt, folgt die Behauptung mit Satz 1.2.10.

Die Konvergenz von Reihen kann daher rühren, dass sich beim Aufaddieren der Glieder gewisse Terme gegenseitig aufheben. So werden wir später sehen, dass die anharmonische oder alternierende harmonische Reihe

\sum\_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}/{n}#

gegen \ln 2 konvergiert. Dies führt zu folgender

1.5.5 Definition:

Eine Reihe \sum\_{n=1}^\infty x\_n mit x\_n \in \K^d heißt {absolut konvergent}, falls die Reihe der Absolutbeträge \sum\_{n=1}^\infty|x\_n| in \R konvergiert.

Gerechtfertigt wird diese Definition durch folgendes

1.5.6 Lemma:

Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent.

Beweis:

Sei \sum\_{n=1}^\infty x\_n absolut konvergent. Dann existiert nach dem Cauchy–Kriterium für jedes \epsilon>0 ein N \in \N dergestalt, dass

|x\_n| + \dots + |x\_m| < \epsilon \forall n,m \geq N.

Dann aber gilt auch

|x\_n +\dots x\_m| \leq |x\_n| + \dots + |x\_m|< \epsilon \forall n,m \geq N,

und die Konvergenz von \sum\_{n=1}^\infty x\_n ergibt sich infolge des Cauchy–Kriteriums.

### 1.5.2 Konvergenz–Kriterien

1.5.7 Satz: [Majorantenkriterium]

Sei \sum\_{n=1}^\infty x\_n eine Reihe in \K^d und gelte |x\_n| \leq c\_n für gewisse Zahlen c\_n\in \R^+. Ist die Folge \sum\_{n=1}^\infty c\_n konvergent, so konvergiert die Reihe \sum\_{n=1}^\infty x\_n absolut.

Beweis:

Nach dem Cauchy–Kriterium bedeutet die Konvergenz von \sum\_{n=1}^\infty c\_n, dass zu jedem \epsilon>0 ein N \in \N existiert mit

c\_n+\dots +c\_m \leq \epsilon \forall n,m \geq N.

Aufgrund von |x\_n| \leq c\_n für alle n folgt hieraus

|x\_n| + \dots + |x\_m| < \epsilon \forall n,m \geq N.

Damit ist nach dem Cauchy–Kriterium die Folge \sum\_{n=1}^\infty |x\_n| konvergent und wir erhalten die Behauptung.

1.5.8 Beispiel:[Geometrische Reihe]

Sei z \in \C eine komplexe Zahl. Dann ist die Reihe

\label{eq:8}

\sum\_{n=0}^\infty z^n

absolut konvergent, falls |z|<1, und ansonsten nicht konvergent. Tatsächlich gilt für z \not=1 infolge der endlichen geometrischen Reihe

s\_n=1+z+\dots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}/{1-z}#,

so dass

\lim\_{n \to \infty} s\_n= \frac{1}/{1-z}# |z|<1.

Entsprechendes gilt auch für die Folge der Partialsummen 1+|z|+\dots+|z^n|, so dass die geometrische Reihe \eqref{eq:8} absolut gegen 1/(1-z) konvergiert. Für |z| \geq 1 gilt |z^n| \geq 1. In diesem Fall kann somit z^n keine Nullfolge sein und die geometrische Reihe nicht konvergieren.

1.5.9 Satz:[Wurzelkriterium]

Sei \sum\_{n=1}^\infty x\_n eine Reihe in \K^d und

\alpha:= \limsup \sqrt[n]{|x\_n|}.

Dann gilt:

Für \alpha<1 ist die Reihe \sum\_{n=1}^\infty x\_n absolut konvergent.

Für \alpha>1 ist \sum\_{n=1}^\infty x\_n nicht konvergent

Beweis:

Wir betrachten zunächst den Fall \alpha <1. Dann ist \alpha< (1+\alpha)/2 <1 und nach Definition des Limes superiors liegen nur endlich viele Glieder der Folge \sqrt[n]{|x\_n|} oberhalb von (1+\alpha)/2. Es existiert somit ein N\in \N derart, dass

\sqrt[n]{|x\_n|} < \frac{1+\alpha}/{2}# <1 bzw. |x\_n| < (\frac{1+\alpha}/{2}# )^n \forall n \geq N.

Die geometrische Reihe \sum\_{n=1}^\infty (\frac{1+\alpha}/{2}# )^n ist konvergent, so dass infolge des Majorantenkriteriums die Reihe \sum\_{n=1}^\infty x\_n absolut konvergent sein muss. Ist nun \alpha >1, so existiert nach Definition des Limes Superior eine Teilfolge \mklm{\sqrt[n\_k]{|x\_{n\_k}|}}, welche gegen eine Zahl x>1 konvergiert. Für deren Glieder muss dann notwendig \sqrt[n\_k]{|x\_{n\_k}|}\geq 1 ab einem bestimmten n\_k gelten.

Damit kann x\_{n\_k} keine Nullfolge sein und die Reihe \sum\_{n=1}^\infty x\_n nach Korollar 1.5.2 nicht konvergieren.

Für \alpha =1 ist keine Aussage über die Konvergenz von \sum\_{n=1}^\infty x\_n möglich, wie das folgende Beispiel zeigt.

1.5.10 Beispiel:

Sei z \in \C gegeben, x\_n=z^n/n und betrachte die Reihe \sum\_{n=1}^\infty x\_n. Es ist \sqrt[n]{|x\_n|} =|z|/\sqrt[n]{n}, so dass infolge von \lim\_{n\to \infty} \sqrt[n]{n}=1 die Limesmenge von \mklm{\sqrt[n]{|x\_n|}} durch |z| gegeben ist. Mithin ist

\alpha=\limsup\sqrt[n]{|x\_n|}=|z|.

Für |z|<1 liegt somit nach dem Wurzelkriterium absolute Konvergenz vor, für |\alpha| >1 divergiert die Reihe. Sei nun |z|=1. Es wurde bereits in Bemerkung 1.5.3 gezeigt, dass für z=1 die Reihe divergiert. Nun ist a\_n=1/n eine fallende Nullfolge und für z\not=1 sind die Partialsummen

z+z^2+\dots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}/{1-z}#-1

offenbar beschränkt. Das folgende Kriterium besagt dann, dass für |z|=1, z\not=1 die Reihe konvergiert. Damit ist insbesondere die Konvergenz der anharmonischen Reihe bewiesen.

1.5.11 Satz:[Abel-Dirichlet-Kriterium]

Sei \mklm{x\_n} eine beliebige Folge in \K^d derart, dass die Folge der Partialsummen s\_n=x\_1+ \dots +x\_n beschränkt ist. Desweiteren sei \mklm{a\_n} eine monoton fallende Nullfolge, mithin a\_1 \geq a\_2 \geq \dots \to 0. Dann ist die Reihe \sum\_{n=1}^\infty a\_n x\_n konvergent.

Beweis:

Sei \sigma\_n=a\_1x\_1+a\_2x\_2+ \dots +a\_nx\_n. Man berechnet für n>m

\sigma\_n-\sigma\_m

=a\_{m+1} x\_{m+1} + \dots+ a\_n x\_n=a\_{m+1}(s\_{m+1}-s\_m)+ \dots+a\_n(s\_n-s\_{n-1})

=-a\_{m+1} s\_m + (a\_{m+1} -a\_{m+2})s\_{m+1} + \dots + (a\_{n-1}-a\_n)s\_{n-1}+a\_ns\_n .

Nach Voraussetzung ist a\_k-a\_{k+1} \geq 0 für alle k und es existiert ein M mit |s\_k|<M für alle k , so dass

\label{RG}

|\sigma\_n-\sigma\_m|

\leq M (a\_{m+1}+(a\_{m+1}-a\_{m+2})+ \dots + (a\_{n-1}-a\_n) + a\_n )

\leq 2 M a\_{m+1}.

Da \mklm{a\_n} eine Nullfolge ist, existiert für jedes \epsilon>0 ein N mit |a\_m|\leq \epsilon für alle m \geq N. Damit aber folgt

|\sigma\_n-\sigma\_m| \leq 2M \epsilon \forall n >m \geq N.

Damit stellt \mklm{\sigma\_n} eine Cauchy–Folge dar, welche aufgrund der Vollständigkeit von \K^d konvergiert und wir erhalten die Behauptung.

1.5.12 Beispiel:

Wir betrachten die Reihe \sum\_{n=1}^\infty x\_n mit Gliedern x\_n=(-1)^n. Dann gilt für die Folge der Partialsummen

x\_1+x\_2+\dots +x\_n = 0 falls n gerade

x\_1+x\_2+\dots +x\_n = 1 falls n ungerade,

so dass \sum\_{n=1}^\infty x\_n nicht konvergieren kann.

Ein weiteres Kriterium für die Konvergenz von Reihen liefert folgendes

1.5.13 Korollar:[Leibniz–Kriterium]

Ist \sum\_{n=1}^\infty y\_n eine Reihe reeller Zahlen mit alternierenden Vorzeichen, mithin y\_1,y\_3, \dots \geq 0 und y\_2,y\_4, \dots \leq 0 und |y\_1| \geq |y\_2| \geq \dots \to 0 eine monoton fallende Nullfolge, so ist die Reihe \sum\_{n=1}^\infty y\_n konvergent.

Beweis:

Mittels des Abel–Dirichlet–Kriteriums ergibt sich mit a\_n=|y\_n| und x\_n=(-1)^{n+1} aufgrund von

x\_1+x\_2+\dots +x\_n=\begin{cases} 0 & falls n gerade \ 1 &falls n ungerade\end{cases}

unmittelbar die Behauptung.

1.5.14 Beispiel:

Mittels des Leibniz–Kriteriums folgt, dass die Reihe

1-\frac 13+ \frac 15 -\frac 17 +\frac 19\dots

konvergent ist. Wie später noch gezeigt werden soll, ist deren Grenzwert \pi/4. Ebenso ist nach obigem Korollar die alternierende harmonische Reihe konvergent.

1.5.15 Satz: [d'Alambert–Kriterium oder Quotientenkriterium]

Sei \mklm{x\_n} eine Folge in \K^d. Dann ist die entsprechende Reihe \sum\_n x\_n

absolut konvergent, falls \limsup \frac{|x\_{n+1}|}/{|x\_n|}# < 1.

nicht konvergent, falls ein N \in N existiert mit \frac{|x\_{n+1}|}/{|x\_n|}# \geq 1 für alle n \geq N.

Beweis:

Sei \alpha=\limsup \frac{|x\_{n+1}|}/{|x\_n|}#< 1. Nach Definition des Limes superior existiert somit ein N \in\N mit

\frac{|x\_{n+1}|}/{|x\_n|}# <\frac{\alpha+1}/{2}# \forall n \geq N.

Mittels Iteration folgt

|x\_{N+k}| \leq |x\_N| ( \frac {\alpha+1}\{2}# ) ^k \forall k\in \N.

Da (\alpha+1)/2<1, ist die Reihe \sum\_n [(\alpha+1)/2]^n absolut konvergent und somit nach dem Majorantenkriterium auch die Reihe \sum\_n x\_n. Andererseits impliziert die Tatsache, dass \frac{|x\_{n+1}|}/{|x\_n|}# \geq 1 für alle hinreichend große n \in \N, dass die Folge \mklm{x\_n} keine Nullfolge sein kann. In diesem Fall kann somit \sum\_nx\_n nicht konvergieren.

1.5.16 Beispiel:

Die Reihe

\sum\_{n=1}^\infty \frac{z^n}/{n!}#, z \in \C,

ist absolut konvergent. So berechnet man mit x\_n=z^n/n! für n \to \infty

| \frac {x\_{n+1}}/{x\_n}# | =\frac{|z|}/{n+1}#\to 0.

Also ist E(\mklm{x\_{n+1}/x\_n})=\mklm{0} und die Konvergenz folgt mit dem Quotientenkriterium.

Die Reihe

\sum\_{n=1}^\infty \frac{n!}/{n^n}#

ist absolut konvergent, denn mit x\_n=n!/n^n ist

| \frac {x\_{n+1}}/{x\_n}# | = \frac{(n+1)n^n}/{(n+1)^{n+1}}#

= \frac{n^n}/{(n+1)^n}# = \frac{1}/{(1+1/n)^n}# \to \frac{1}/{e}# <1,

woraus sich abermals die Konvergenz nach dem Quotientenkriterium ergibt.

Sei z eine komplexe Zahl mit |z| > 1 und p \in \N. Dann ist infolge des Quotientenkriteriums die Reihe

\sum\_{n=1}^\infty \frac{n^p}/{z^n}#

absolut konvergent, da mit x\_n=n^p/z^n

| \frac {x\_{n+1}}/{x\_n}# |=\frac{1}/{|z|}# (1+\frac 1n \Big)^p \to \frac{1}/{|z|}#.

In Fällen, wo das Majorantenkriterium nicht zur Anwendung kommen kann, erweist sich folgendes Kriterium als nützlich.

1.5.17 Satz:

Sei \mklm{x\_n} eine monoton fallende Folge positiver Zahlen. Dann ist die Reihe \sum\_n x\_n genau dann konvergent, falls \sum\_k 2^k x\_{2^k} konvergent ist.

Beweis:

Zum Beweis betrachten wir die Partialsummen der beiden in Frage kommenden Reihen

s\_n=x\_1+ \dots + x\_n, t\_k=x\_1+2x\_2+4x\_4+ \dots + 2^k x\_{2^k}

und wählen n und k derart, dass n< 2^k. Da die Folge \mklm{x\_n} als monoton fallend vorausgesetzt war, erhalten wir die Abschätzung

s\_n \leq x\_1+(x\_2+x\_3)+ \dots +(x\_{2^k} + \dots + x\_{2^{k+1}-1} )

\leq x\_1 + 2 x\_2+ \dots + 2^k x\_{2^k}=t\_k.

Sei nun andererseits n>2^k. Unter der Monotonie-Voraussetzung ergibt sich abermals

s\_n

= x\_1+ \dots +x\_{2^k} + \dots + x\_n\geq x\_1+x\_2+(x\_3+x\_4)+ \dots + (x\_{2^{k-1}+1} +\dots + x\_{2^k})

\geq \frac 12 x\_1 + x\_2+2x\_4+ \dots + 2^{k-1} x\_{2^k}=t\_k/2.

Insgesamt folgt nun: Ist \sum\_nx\_n konvergent, so ist die Folge der Partialsummen \mklm{s\_n} beschränkt und damit auch die monoton wachsende Folge der \mklm{t\_k}. Nach Satz 1.2.22 ist somit \mklm{t\_k} konvergent. Dies jedoch bedeutet, dass die Reihe \sum\_k 2^k x\_{2^k} konvergiert. Die Umkehrung folgt analog.

1.5.18 Beispiel:

Die Reihe

\sum\_{n=1}^\infty n^{-p}

ist genau für p>1 konvergent. Denn nach Satz 1.5.17 ist die Konvergenz dieser Reihe äquivalent zu der Konvergenz der Reihe \sum\_k 2^k 2^{-kp}=\sum\_k 2^{k(1-p)}=\sum\_k (2^{1-p})^{k}. Aus dem Konvergenzverhalten der geometrischen Reihe folgt dann, dass letztere Reihe genau dann konvergent ist, falls 2^{1-p} <1, also 1-p<0 gilt.

### 1.5.3 Umordnung von Reihen

Nachdem wir der Frage nach der Konvergenz von Reihen nachgegangen sind, wollen wir als nächstes untersuchen, inwiefern der Grenzwert einer Reihe von der Reihenfolge der Summation abhängt. Dass dies eine wichtige Frage ist und tatsächlich geschehen kann, soll anhand eines Beispieles illustriert werden.

1.5.19 Beispiel:

Gegeben sei die Reihe

\frac {1}/{\sqrt{1}}#-\frac{1}/{\sqrt{1}}# +\frac{1}/{\sqrt{2}# }-\frac{1}/{\sqrt{2}# }+\frac{1}/{\sqrt{3}# }-\frac{1}/{\sqrt{3}# }+ \cdots

Die entsprechenden Partialsummen lauten s\_{2n}=0 bzw. s\_{2n+1}=1/(\sqrt{n+1}), so dass

\lim\_{n\to \infty} s\_n = 0.

Die betrachtete Reihe ist also konvergent, aber nicht absolut konvergent aufgrund der Divergenz der harmonischen Reihe, da 1/\sqrt n=\sqrt n/n. Wir ordnen die Reihe nun um gemäß

( \frac{1}/{\sqrt{1}# }+\frac{1}/{\sqrt{2}# }-\frac{1}/{\sqrt{1}# } \right)

+( \frac{1}/{\sqrt{3}# }+\frac{1}/{\sqrt{4}# }-\frac{1}/{\sqrt{2}# } )

+(\frac{1}/{\sqrt{5}# }+\frac{1}/{\sqrt{6}# }-\frac{1}/{\sqrt{3}# }) +\cdots

Die entsprechenden 3n-ten Partialsummen lauten nun

\tilde s\_3=\frac{1}/{\sqrt 2}# , \tilde s\_{6}

=\frac{1}/{\sqrt 3}# +\frac{1}/{\sqrt 4}# , \tilde s\_{9}

=\frac{1}/{\sqrt 4}# +\frac{1}/{\sqrt 5}# +\frac{1}/{\sqrt 6}#

\tilde s\_{3n} = \frac{1}/{\sqrt {n+1}}# +\dots+\frac{1}/{\sqrt{2n}# }

> \frac{n}/{\sqrt{2n}}#

so dass \lim\_{n \to \infty} \tilde s\_{3n} =\infty. Die auf diese Weise umgeordnete Reihe kann somit nicht konvergieren.

Dies führt zu folgender, vorläufigen Begriffsbildung.

1.5.20 Definition:

Eine Reihe \sum\_{k=1}^\infty x\_k in \K^d heißt {unbedingt konvergent}, falls sie konvergent ist und für jede bijektive Abbildung f:\N \rightarrow \N die Reihe

\label{eq:9}

\sum\_{k=1}^\infty x\_{f(k)}

ebenfalls, jedoch möglicherweise gegen einen anderen Grenzwert in \K^d konvergiert. Sie heißt {stark unbedingt konvergent}, falls für jede bijektive Abbildung f:\N \rightarrow \N die Reihe \eqref{eq:9} gegen den gleichen Grenzwert konvergiert.

Die in Beispiel 1.5.19 betrachtete Reihe ist somit nicht unbedingt konvergent. Nach Definition gilt offenbar

stark unbedingt konvergent \Longrightarrow unbedingt konvergent \Longrightarrow konvergent.

Im Folgenden werden wir jedoch zeigen, dass die Äquivalenzen

stark unbedingt konvergent \Longleftrightarrow unbedingt konvergent \Longleftrightarrow absolut konvergent

gelten.

1.5.21 Satz:

Jede absolut konvergente Reihe ist stark unbedingt konvergent.

Beweis:

Angenommen, \sum\_n x\_n ist absolut konvergent. Sei weiter \sum\_n x\_{f(n)}, f:\N \to \N, eine Umordnung dieser Reihe und seien

 s\_n=x\_1+ \dots + x\_n, \tilde s\_n=x\_{f(1)}+ \dots + x\_{f(n)}

die entsprechenden Partialsummen. Das Cauchy–Kriteriums besagt, dass für jedes \epsilon>0 ein N\_\epsilon \in \N existiert derart, dass

\label{eq:10}

\sum\_{i=n}^m |x\_i|< \epsilon \forall m \geq n \geq N\_\epsilon.

 Da f:\N \rightarrow \N bijektiv ist, existiert offenbar ein P\_\epsilon \in \N mit

 \mklm{1,\dots, N\_\epsilon} \subset f(\mklm{1,\dots, P\_\epsilon}).

 Wählt man nun ein p>P\_\epsilon, so berechnet man für die Differenz der Partialsummen

 s\_p-\tilde s\_p=x\_1+ \dots + x\_p- (x\_{f(1)}+ \dots + x\_{f(p)})=Summe gewisser x\_j mit j>N\_\epsilon.

Demnach ist |s\_p-\tilde s\_p|<\epsilon infolge von \eqref{eq:10}. Andererseits gilt nach Voraussetzung s\_n \to s für ein s \in \K^k. Damit muss auch die Folge der Partialsummen \tilde s\_n gegen s konvergieren und wir erhalten die Behauptung.

1.5.22 Satz:[Riemannscher Umordnungssatz]

Sei \sum\_n x\_n eine Reihe reeller Zahlen, die konvergent, aber nicht absolut konvergent ist. Desweiteren seien \alpha, \beta \in \R\cup \mklm{\pm \infty} beliebig mit \alpha \leq \beta.

%Auch \alpha=-\infty und \beta=\infty sind zugelassen.

Dann existiert eine Umordnung f:\N \rightarrow \N dieser Reihe dergestalt, dass für die entsprechende Folge der Partialsummen \tilde s\_n=x\_{f(1)}+ \dots + x\_{f(n)} gilt

\liminf \tilde s\_n= \alpha, \limsup \tilde s\_n=\beta.

Insbesondere kann somit eine konvergente, jedoch nicht absolut konvergente Reihe reeller Zahlen gegen jeden beliebigen Grenzwert konvergieren.

Beweis:

Wir definieren zunächst

p\_n=\frac 12 ( |x\_n|+x\_n ), q\_n=\frac 12 ( |x\_n|-x\_n ),

so dass

p\_n, q\_n \geq 0, p\_n+q\_n =|x\_n|, p\_n-q\_n=x\_n.

Ersichtlicherweise enthält die Folge \mklm{p\_n} nur die positiven, und \mklm{-q\_n} nur die negativen Glieder der Folge \mklm{x\_n}.

Wären nun beide Reihen \sum\_n p\_n und \sum\_n q\_n konvergent, so müßte nach Proposition 1.5.4 entgegen der Voraussetzung auch \sum\_n(p\_n+ q\_n)=\sum\_n |x\_n| konvergent sein. Sei also beispielsweise \sum\_n q\_n konvergent, \sum\_n p\_n jedoch nicht. Dann aber müsste auch \sum\_n (q\_n+x\_n) =\sum\_n p\_n konvergent sein, Widerspruch. Also sind sowohl \sum\_n p\_n als auch \sum\_n q\_n nicht konvergent und die entsprechenden, monoton wachsenden Partialsummen konvergieren gegen +\infty. Anderenfalls wären letztere beschränkt und müssten nach Satz 1.2.22 konvergieren. Insbesondere hat die Folge \mklm{x\_n} unendlich viele positive und negative Glieder, welche nach Voraussetzung eine Nullfolge bilden. Es bezeichne nun \mklm{P\_n} die Folge der positiven Glieder der Folge \mklm{x\_n} und \mklm{Q\_n} die Folge der strikt negativen Glieder der Folge \mklm{x\_n} in der jeweils auftretenden Reihenfolge. Dann gilt \sum\_n P\_n=+\infty, \sum\_n Q\_n=-\infty.

Desweiteren seien \alpha, \beta \in \R\cup \mklm{\pm\infty} mit \alpha \leq \beta gegeben und \mklm{\alpha\_n}, \mklm{\beta\_n} Folgen mit \alpha\_n \to \alpha, \beta\_n \to \beta. Seien nun

m\_1 die erste Zahl mit \tilde s\_{m\_1}:=P\_1+\dots+P\_{m\_1}> \beta\_1;

k\_1 die erste Zahl mit \tilde s\_{m\_1+k\_1}:=P\_1+\dots+P\_{m\_1}+(Q\_1 + \dots +Q\_{k\_1}) < \alpha\_1;

m\_2 die erste Zahl mit \tilde s\_{m\_1+k\_1+m\_2}:=P\_1+\dots+P\_{m\_1}+(Q\_1 + \dots +Q\_{k\_1}) +P\_{m\_1+1} + \dots + P\_{m\_2}> \beta\_2;

k\_2 die erste Zahl mit \tilde s\_{m\_1+k\_1+m\_2+k\_2}:=P\_1+\dots+P\_{m\_1}+(Q\_1 + \dots +Q\_{k\_1}) +P\_{m\_1+1} + \dots + P\_{m\_2}+(Q\_{k\_1+1}+\dots Q\_{k\_2})< \alpha\_2;

usw.

Wir erhalten alsdann ein Umordnung \sum\_n x\_{f(n)} der Reihe \sum\_n x\_n dergestalt, dass für die entsprechenden Partialsummen \tilde s\_n insbesondere

\label{eq:11}

\tilde s\_{m\_1+k\_1+m\_2+k\_2 + \dots +m\_j} >\beta\_j, \tilde s\_{m\_1+k\_1+m\_2+k\_2 + \dots m\_j+k\_j}<\alpha\_j

gilt. Somit existieren Teilfolgen von \mklm{\tilde s\_n}, welche entweder gegen \infty bzw. -\infty konvergieren, oder aber beschränkt sind und \eqref{eq:11} genügen. In letzterem Fall enthalten sie wiederum nach dem Satz von Bolzano–Weierstrass konvergente Teilfolgen, deren Grenzwerte größer oder gleich \beta bzw. kleiner oder gleich \alpha sein müssen. Folglich ist

\limsup \tilde s\_n \geq \beta, \liminf \tilde s\_n \leq \alpha.

Die Tatsache, dass \mklm{x\_n} eine Nullfolge ist, impliziert nun, dass für jedes \epsilon>0 ein L \in \N existiert mit P\_l <\epsilon für alle l \geq L. Aus der Konstruktion der umgeordneten Reihe ergibt sich dann für die Partialsummen \tilde s\_n die Existenz eines N \in \N derart, dass für jedes n \geq N ein m(n) existiert mit \tilde s\_n \leq \beta\_{m(n)}+\epsilon, indem man in der \tilde s\_n definierenden Summe das P\_l mit größtem l \geq L weglässt. Damit folgt für jedes \epsilon>0, dass

\limsup \tilde s\_n \leq \limsup \beta\_{m(n)}+\epsilon =\beta +\epsilon,

also \limsup \tilde s\_n \leq \beta. Entsprechend sieht man, dass \liminf \tilde s\_n \geq \alpha. Damit ist der Satz bewiesen.

1.5.23 Satz:

Für eine Reihe \sum\_n x\_n in \K^d sind folgende Aussagen äquivalent:

Aufzählungsanfang

(1) \sum\_n x\_n ist absolut konvergent.

(2) \sum\_n x\_n ist stark unbedingt konvergent.

(3) \sum\_n x\_n ist unbedingt konvergent.

Aufzählungsende

Beweis:

Dass die Bedingung (1) die Bedingung (2) impliziert, wurde bereits in Satz 1.5.21 bewiesen. Die Implikation (2) \Rightarrow (3) ist per Definition klar. Zu zeigen bleibt somit (3) \Rightarrow (1).

Sei also \sum\_n x\_n konvergent, jedoch nicht absolut konvergent, und schreibe x\_n=(x\_n^1, \dots, x\_n^d)\in\K^d. Nach Voraussetzung ist jede der Reihen \sum\_n x\_n^j\in \R konvergent, jedoch mindestens eine von ihnen nicht absolut konvergent, da |x\_n|\leq C(|x\_n^1|+\dots +|x\_n^d|) für ein von n unabhängiges C >0. Diese nicht absolut konvergente Reihe könnte dann nach dem Riemann'schen Umordnungssatz so umgeordnet werden, dass sie gegen +\infty konvergiert. Die ensprechende Umordnung der Reihe \sum\_n x\_n könnte dann nicht mehr konvergieren und somit nicht unbedingt konvergent sein. Damit folgt die Implikation (3) \Rightarrow (1).

### 1.5.4 Das Cauchy–Produkt für Reihen

Wir wollen im Folgenden Produkte von Reihen definieren. Hierzu betrachten wir zunächst das Produkt zweier Polynome \sum\_{i=0}^n a\_i z^i und \sum\_{i=0}^n b\_i z^i mit z \in \C. Man berechnet dann

\sum\_{i=0}^n a\_i z^i \cdot \sum\_{i=0}^n b\_i z^i=a\_0b\_0 + (a\_1b\_0 + a\_0 b\_1) z + (a\_2b\_0 + a\_1 b\_1 + a\_0b\_2) z^2+ \dots + z^n \sum\_{k=0}^n a\_k b\_{n-k}+ \cdots.

Dies führt uns zu folgender

1.5.24 Definition:

Das Cauchy–Produkt zweier Reihen komplexer Zahlen \sum\_n a\_n und \sum\_n b\_n ist definiert als die Reihe \sum\_n c\_n mit den Gliedern c\_n=\sum\_{k=0}^n a\_k b\_{n-k}.

Wie das folgende Beispiel zeigt, ist das Cauchy–Produkt zweier konvergenter Reihen im Allgemeinen keine konvergente Reihe.

1.5.25 Beispiel:

Die Reihe

\sum\_n a\_n = \sum\_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}/{\sqrt{n+1}#} = 1-\frac{1}/{\sqrt2}# +\frac{1}/{\sqrt{3}}# -\frac{1}/{\sqrt 4}# + \dots

konvergiert nach dem Leibniz–Kriterium für alternierende Reihen. Die einzelnen Glieder ihres Cauchy–Produktes mit sich selbst berechnen sich jedoch zu

c\_n=(-1)^n \sum\_{k=0}^n \frac{1}/{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}#.

Wegen (k+1)(n-k+1)=(n/2+1)^2 -(n/2-k)^2 \leq (n/2+1)^2 ergibt sich jedoch |c\_n| \geq \frac{n+1}/{n/2+1}#=\frac {2n+1}/{n+2}# . Damit konvergiert die Folge \mklm{c\_n} nicht gegen null und das entsprechende Cauchy–Produkt ist nicht konvergent.

Folgender Satz besagt, wann das Cauchy–Produkt zweier Reihen konvergent ist.

1.5.26 Satz:

Seien \sum\_n a\_n und \sum\_n b\_n zwei konvergente Reihen komplexer Zahlen und mindestens eine von beiden Reihen absolut konvergent. Dann ist das Cauchy–Produkt

\sum\_{n=0}^\infty c\_n, c\_n=\sum\_{k=0}^n a\_k b\_{n-k},

konvergent und es gilt \sum\_n c\_n= (\sum\_m a\_m ) \cdot (\sum\_k b\_k ).

Beweis:

Es bezeichnen im Folgenden

A\_n=\sum\_{j=0}^n a\_j, B\_n=\sum\_{j=0}^n b\_j, C\_n=\sum\_{j=0}^n c\_j

die jeweiligen Partialsummen der in Frage kommenden Reihen. Desweiteren schreiben wir B= \lim\_{n \to \infty} B\_n und \beta\_n =B\_n -B. Man berechnet nun

C\_n = c\_0 + c\_1 + \dots +c\_n

= a\_0b\_0+ (a\_1b\_0 + a\_0 b\_1) + \dots + (a\_0 b\_n + a\_1 b\_{n-1} + \dots + a\_n b\_0)

= a\_0 B\_n + a\_1 B\_{n-1} + \dots + a\_n B\_0

= a\_0(B+\beta\_n) + a\_1 ( B+\beta\_{n-1}) + \dots + a\_n(B+ \beta\_0).

Hieraus ergibt sich

C\_n=A\_n B+\gamma\_n

 mit \gamma\_n=\alpha\_0 \beta\_n+ \alpha\_1 \beta\_{n-1}+ \dots + a\_n \beta\_0. Sei nun \sum \_n a\_n absolut konvergent. Um zu beweisen, dass \sum\_n c\_n gegen das Produkt (\sum\_m a\_m ) \cdot (\sum\_k b\_k ) konvergiert, reicht es somit zu zeigen, dass \gamma\_n \to 0. Sei also \epsilon>0 gegeben. Da die Partialsummen B\_n gegen B konvergieren, existiert ein N \in \N mit |\beta\_n| < \epsilon für alle n \geq N. Folglich erhalten wir für alle n \geq N mittels der Dreiecksungleichung

|\gamma\_n|=|a\_0 \beta\_n + a\_1 \beta\_{n-1} + \dots + a\_n \beta\_0|

\leq |a\_0\beta\_n +a\_1\beta\_{n-1} + \dots

+ a\_{n-N-1} \beta\_{N+1}| + |a\_{n-N} \beta\_N + \dots + a\_n \beta\_0|

\leq \epsilon ( |a\_0| + \dots + |a\_{n-N-1}|) + | a\_{n-N} \beta\_N + \dots + a\_n \beta\_0|

\leq \epsilon \sum\_{k=0}^\infty |a\_k| + | a\_{n-N} \beta\_N| + \dots + |a\_n \beta\_0|.

Lässt man nun bei festem \epsilon und festem N den Index n gegen unendlich gehen, so ergibt sich

\label{eq:12}

\limsup |\gamma\_n| \leq \epsilon \sum\_{k=0}^\infty |a\_k|.

Tatsächlich gilt in diesem Fall | a\_{n-N} \beta\_N| + \dots + |a\_n \beta\_0| \to 0, da \mklm{|a\_n|} eine Nullfolge ist. Da die Ungleichung \eqref{eq:12} für jedes \epsilon>0 gilt, erhalten wir \limsup |\gamma\_n|\leq 0 und damit E(\mklm{|\gamma\_n|})=\mklm{0}. Folglich konvergiert \mklm{\gamma\_n} gegen null und die Behauptung ist bewiesen.

1.5.27 Korollar:

\label{kor:9}

Das Cauchy–Produkt zweier absolut konvergenter Reihen ist ebenfalls absolut konvergent.

Beweis:

Sind \sum\_n a\_n und \sum\_n b\_n zwei absolut konvergente Reihen komplexer Zahlen, so sind per Definition auch \sum\_n |a\_n| und \sum\_n |b\_n| (absolut) konvergent. Nach vorigem Satz konvergieren dann die Cauchy–Produkte

\sum\_n c\_n, c\_n=\sum\_{j=0} a\_j b\_{n-j},

und

\sum\_n d\_n, d\_n=\sum\_{j=0} |a\_j| |b\_{n-j}|.

Da jedoch |c\_n| \leq d\_n, folgt nach dem Majoranten–Kriterium die absolute Konvergenz des Cauchy–Produktes \sum\_n c\_n.

### 1.5.5 Die Exponential-Funktion

Wir hatten bereits in Beispiel 1.5.16 mittels des Quotientenkriteriums gesehen, dass die Reihe

E(z):=\sum\_{n=0}^\infty \frac{z^n}/{n!}#, z \in \C,

absolut konvergent ist.

1.5.28 Definition:

Die durch definierte Funktion

\C \ni z \longmapsto E(z)=\sum\_{n=0}^\infty \frac{z^n}/{n!}# \in \C

wird Exponentialfunktion genannt.

Erinnerung: Sei a>0, und r=p/q eine rationale Zahl, sowie p,q>0 bzw. p<0, q>0. Dann definiert man

a^{p/q}:=\sqrt[q]{a^p}, bzw. a^{p/q}:= \frac{1}/{a^{-p/q}}#

und für eine reelle Zahl x \in \R setzt man

a^x:=\begin{cases} \sup \mklm{a^r: r \in \Q, r<x} & für a\geq 1 \ 1/(a^{-x}) & für a<1.\end{cases}

Mit diesen Festlegungen gilt nun folgender

1.5.29 Satz:

Sei x \in \R. Dann gilt E(x)=e^x und man schreibt allgemein e^z:=E(z) für beliebiges z \in \C.

Beweis:

Seine z\_1,z\_2 \in \C. Nach Korollar 1.5.27 ist das Cauchy–Produkt E(z\_1) \cdot E(z\_2)=\sum\_n c\_n absolut konvergent und man berechnet für die Koeffizienten

c\_n =\sum\_{k=0}^n \frac{z\_1^k}/{k!}# \frac{z\_2^{n-k}}/{(n-k)!}#

= \frac{1}/{n!}# \sum\_{k=0}^n \frac{n!}/{k!(n-k)!}# {z\_1^k z\_2^{n-k}}

=\frac {(z\_1+z\_2)^n}/{n!}# ,

so dass E(z\_1) \cdot E(z\_2) = E(z\_1+z\_2). Infolge von Satz 1.3.2 ist weiter E(1)=e, sowie

 E(0)=1.

Desweiteren ist e^x e^y =e^{x+y}. Nun gilt für n \in \N

E(n)=E(1+\dots +1)=E(1) \cdots E(1)= e^n,

sowie

E(n)E(-n)=E(0)=1, also E(-n)= \frac{1}/{E(n)}#.

Entsprechend ist e^n e^{-n} =e^0=1 und wir erhalten

E(n)=e^n für alle n \in \Z.

Ist nun r=p/q eine rationale Zahl, so gilt

\label{eq:13}

(e^r)^q=e^{rq}=e^p=E(p)= E(rq) = ( E(r))^q.

Da nun offenbar E(x) \geq 1 für x\geq 0 gilt, folgt aufgrund von E(x) = 1/ E(-x) insgesamt

E(x)>0 für alle x \in \R.

Da e^{r} ebenfalls positiv ist, können wir in \eqref{eq:13} die Wurzel ziehen und erhalten

E(r)=e^r für alle r \in \Q.

Sei nun x \in \R. Es ist

e^x = \sup \mklm{e^r: r \in \Q, r<x} = \sup\mklm {E(r) : r \in \Q, r<x}.

Für r<x berechnet man

\frac{E(x)}/{E(r)}# = E(x-r) = \sum\_{n=0}^\infty \frac {(x-r)^n}/{n!}# =1 + (x-r) + \cdots \geq 1.

Somit ist E(x) eine obere Schranke der Menge \mklm {E(r) : r \in \Q, r<x}. Nach Definition des Supremums als kleinste obere Schranke ist somit e^x \leq E(x). Um die umgekehrte Ungleichung einzusehen, betrachten wir eine Folge rationaler Zahlen \mklm{r\_n} mit r\_n \to x und r\_n<x. Als obere Schranke der Menge \mklm {E(r) : r \in \Q, r<x} erfüllt e^x die Beziehung E(r\_n)=e^{r\_n} \leq e^x. Nun berechnet man für z \in \C, |z|\leq 1,

|E(z)-1| = |z+ \frac{z^2}/{2!}# + \cdots | \leq |z| ( 1 + \frac {|z|}/{2!}# + \cdots ) \leq |z| ( 1 + \frac {1}/{2!}# + \cdots ) =|z| (e-1).

Für hinreichend großes n ist dann

| \frac{E(x)}/{E(r\_n)}# -1 |=|E(x-r\_n)-1| \leq |x-r\_n|(e-1).

 Nun ist offenbar E(y) < E(z) für 0<y < z und infolge von E(-z)=1/E(z)\leq 1/E(y)=E(-y) allgemein E(y) < E(z) für beliebige y<z. Damit ist

|E(x) - E(r\_n)| \leq E(r\_n) |x-r\_n|(e-1) \leq E(x) |x-r\_n| (e-1)

und wir erhalten \lim\_{n \to \infty} E(r\_n)=E(x). Wegen E(r\_n)\leq e^x folgt somit E(x) \leq e^x und die Behauptung ist bewiesen.

Wir fassen die Eigenschaften der Exponentialfunktion nochmals gesondert zusammen.

1.5.30 Satz: [Eigenschaften der Exponentialfunktion]

Sei e^z=E(z)=\sum\_{n=0}^\infty \frac{z^n}/{n!}#, z \in \C. Dann gilt:

Aufzählungsanfang

(1) e^0=1, E(1)=e.

(2) e^{z\_1+z\_2}=e^{z\_1} e^{z\_2} für alle z\_1,z\_2 \in \C.

(3) e^z\not=0 für alle z \in \C.

(4) Es ist e^x>0 für alle x \in \R.

(5) Aus x<y folgt e^x<e^y.

(6) Ist |z|\leq 1, so gilt |e^z-1| \leq |z| (e-1).

(7) Für |z|<1 gilt |e^z-1| \leq |z|/(1-|z|) .

Aufzählungsende

Beweis:

Bis auf (7) wurde bereits alles bewiesen. Nun aber ist für |z| <1

|e^z-1|\leq |z| ( 1 + \frac {|z|}/{2!}# + \frac{|z|^2}/{3!}# + \cdots ) \leq |z| ( 1 + {|z|} + {|z|^2} + \cdots ) = \frac{|z|}/{1-|z|}#.

1.5.31 Satz:

Die Abbildung \R \rightarrow \R^+, x \mapsto e^x ist bijektiv.

Beweis:

Der vorangehende Satz 1.5.30 (5) impliziert, dass \R \rightarrow \R^+, x \mapsto e^x eine monoton wachsende Funktion und somit eine injektive Abbildung ist. Um die Surjektivität einzusehen, betrachten wir ein beliebiges Element y \in \R^+ zusammen mit den Mengen

A=\mklm{x \in \R: e^x<y}, B= \mklm{x \in \R:y \leq e^x}.

Für a \in A und b \in B gilt offenbar a \leq b. Denn wäre dies nicht so, so folgte e^b \leq e^a im Widerspruch zu e^a<y\leq e^b. Weiter enthält A kein größtes Element und aufgrund von

e^y =1+y+ \frac{y^2}/{2}# + \cdots \geq y für y>0

sieht man, dass y \in B gilt. Entsprechend sieht man, dass e^{1/y} >1/y für y>0, so dass -1/y \in A gilt. Damit stellt (A,B) einen Dedekind'schen Schnitt dar und representiert die reelle Zahl

\alpha:=\sup A= \inf B.

Wir zeigen als nächstes, dass e^\alpha =y, wodurch das Urbild von y bestimmt wäre. Hierzu betrachten wir eine Folge \mklm{a\_n} aus A mit a\_n \to \alpha. Dann ist e^{a\_n} \leq y und mittels Satz 1.5.30 (6) berechnet man

|e^\alpha -e^{a\_n}|\leq e^{a\_n} | e^{\alpha - a\_n} -1| \leq y |\alpha -a\_n| (e-1).

Es folgt e^{a\_n} \to e^\alpha und wir erhalten e^\alpha \leq y. Analog betrachten wir eine Folge \mklm{b\_n} aus B mit b\_n \to \alpha. Dann ist

|e^\alpha -e^{b\_n}|\leq e^{\alpha} | e^{b\_n-\alpha } -1| \leq e^\alpha |\alpha -b\_n| (e-1).

Damit ist e^{b\_n} \to e^\alpha. Wegen y \leq e^{b\_n} ergibt sich dann y \leq e^\alpha und somit insgesamt y=e^\alpha.

 Aus dem letzten Satz ergibt sich die Existenz der Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

1.5.32 Korollar: [Existenz des Logarithmus]

Es existiert eine eindeutige Funktion \ln: \R^+ \rightarrow \R, welche die Gleichung e^{\ln y} =y für alle y \in \R erfüllt und folgende Eigenschaften besitzt:

 Aufzählungsanfang

(1) \ln 1=0, \ln e=1.

(2) \ln(y\_1y\_2)=\ln y\_1+\ln y\_2, \ln y^{-1}= -\ln y.

(3) Es gilt

\ln y >0 für y>1

\ln y <0 für y<1.

(4) Es ist \ln (x^r)= r \ln x für r \in \Q und x>0.

(5) Die Funktion \ln ist nicht beschränkt.

Aufzählungsende

Beweis:

Die Existenz der Logarithmusfunktion ist eine Konsequenz des vorigen Satzes. Deren Eigenschaften ergeben sich wiederum direkt aus den entsprechenden Eigenschaften der Exponentialfunktion.

1.5.33 Definition:

 Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

 \ln: \R^+ \rightarrow \R

 wird {Logarithmusfunktion} genannt.

1.5.34 Lemma:

 Sei a>0 und x \in \R. Dann ist

 a^x=e^{x \ln a} = \sum\_{n=0}^ \infty \frac{(x \ln a)^n}/{n!}#.

 Beweis:

 Es gilt a=e^{\ln a}, so dass nach den Exponentiationsrechenregeln

 a^x= a^{1 \cdot x} =(a)^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a} =E(x \ln a).

Mittels des Quotientenkriteriums ist unschwer einzusehen, dass die Reihe \sum\_{n=0}^ \infty \frac{(x \ln a)^n}/{n!}# absolut konvergiert. Infolge des vorangegangenen Lemmas liegt somit folgende Definition nahe.

1.5.35 Definition:

Sei a>0 und z \in \C. Dann setzt man a^z:=\sum\_{n=0}^ \infty \frac{(z \ln a)^n}/{n!}#.

1.5.36 Korollar:

 Es gilt \ln (x^r) =r \ln x für alle r \in \R und x>0.

 Beweis:

 Sei zunächst x=e. Mit r=\ln y ist

 \ln (e^r) =\ln (e^{\ln y}) = \ln y =r =r \ln e.

Mit vorigem Lemma ergibt sich dann für allgemeines x>0

\ln (x^r)= \ln(e^{r \ln x}) = r \ln x.

# Kapitel 2: Stetige Abbildungen

''I was like a boy playing on the sea-shore, and diverting myself now and then finding a smoother pebble or a prettier shell than ordinary, whilst the great ocean of truth lay all undiscovered before me.''

Sir Isaac Newton (In: David Brewster, "Memoirs of Newton", 1855).

## 2.1 Stetigkeit in einem Punkt

Im Folgenden werden uns Abbildungen zwischen metrischen Räumen interessieren, welche den metrischen Eigenschaften der zugrundeliegenden Räume Rechnung tragen. Der entscheidende Begriff hierbei ist der der Stetigkeit. Um den Stetigkeitsbegriff an einem Punkt einführen zu können, benötigen wir einige Vorbereitungen. Sei im Folgenden (X,d\_X) ein metrischer Raum und A eine beliebige Teilmenge.

Nach Definition gehört ein Punkt p\in X genau dann zum Abschluss von A, falls

 für alle \epsilon>0 gilt K(p,\epsilon) \cap A \not= \emptyset.

2.1.1 Definition:

Ein Punkt p \in X heißt Häufungspunkt von A, falls für alle \epsilon>0 gilt (K(p,\epsilon)-\mklm{p} ) \cap A \not=\emptyset.

Die Menge aller Häufungspunkte von A wird mit A^h bezeichnet.

2.1.2 Bemerkung:

Offenbar gilt \overline A=A \cup A^h.

A ist im Allgemeinen keine Teilmenge von A^h. Sei so beispielsweise (\R^2,d) der euklidische zweidimensionale Raum und A=\overline{D^2(1)} \cup \mklm{(2,0)}. Dann gilt A^h=\overline{D^2(1)}

Ebenso ist auch im Allgemeinen A^h keine Teilmenge von A.

Mit diesen Vorkehrungen treffen wir nun folgende

2.1.3 Definition:

Sei (Y,d\_Y) ein metrischer Raum und f:A \rightarrow Y eine Abbildung, sowie x \in X ein Häufungspunkt von A. Desweiteren existiere ein y \in Y derart, dass für jede Folge \mklm{a\_n} aus A mit a\_n\not= x, welche gegen x konvergiert, f(a\_n) \to y gelte. Dann sagt man, dass der Grenzwert \lim\_{a \to x} f(a) existiert und schreibt

 \lim\_{a \to x} f(a)=y.

Beachte hierbei, dass f bei x überhaupt nicht definiert zu sein braucht.

2.1.4 Beispiel:

Sei X=\R^2, A=\R^2 - \mklm{(0,0)} und Y=\R, sowie

f:A \longrightarrow \R: (x,y) \mapsto \frac {x^3-y^3}/{x^2+y^2}# .

Dann gilt \lim\_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)=0. Tatsächlich berechnet man

\frac {x^3-y^3}/{x^2+y^2}# = \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}/{x^2+y^2}#=(x-y) ( 1 + \frac{xy}/{x^2+y^2}# ).

Da jedoch |{xy}/(x^2+y^2)| \leq 1/2 ist, folgt |f(x,y)| \leq 3 |x-y|/2. Ist nun \mklm{(x\_n,y\_n)} eine beliebige Folge in A, welche gegen (0,0) konvergiert, so ist

|f(x\_n,y\_n)| \leq \frac{3}/{2}# |x\_n-y\_n| \to 0.

Dies bedeutet, dass \lim\_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) =0.

2.1.5 Beispiel:

Sei wieder X=\R^2, A=\R^2 - \mklm{(0,0)} und Y=\R, jedoch diesmal

f:A \longrightarrow \R: (x,y) \mapsto \frac {xy^2}/{x^2+y^4}# .

Wir behaupten dann, dass \lim\_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) nicht existiert. Betrachtet man etwa die Punktfolge (1/n,1/n) \to (0,0), so berechnet man

f(1/n,1/n) =\frac{n}{ n^2+1}\to 0.

Andererseits jedoch ist

f(1/n^2, 1/n)=\frac 12.

Damit gilt jeweils \lim\_{n \to \infty} f(1/n,1/n)=0, \lim\_{n \to \infty} f(1/n^2,1/n)=1/2. Also existiert per Definition \lim\_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) nicht.

2.1.6 Satz:

Seien (X,d\_X) und (Y,d\_Y) metrische Räume, A eine Teilmenge von X, f: A \rightarrow Y eine Abbildung, x \in X ein Häufungspunkt von A und y \in Y. Dann gilt

\lim\_{a \to x} f(a) =y \Longleftrightarrow \forall \epsilon>0 \exists \delta >0: \forall a \in A mit 0 < d\_X(a,x) < \delta: d\_Y(f(a),y) < \epsilon.

 Beweis:

 Angenommen, die angegebene Bedingung ist nicht erfüllt. Dann gilt

 \exists \epsilon>0 \forall \delta >0: \exists a \in A mit 0 < d\_X(a,x) < \delta: d\_Y(f(a),y) \geq \epsilon.

 Betrachte nun die Folge \delta=1,1/2,1/3,\dots. Wir erhalten dann eine Folge von Punkten \mklm{a\_n} in A mit 0< d\_X(a\_n,x)<1/n und d\_Y(f(a\_n),y) \geq \epsilon. Nach Konstruktion ist a\_n \to x, jedoch f(a\_n) \not \to y. Also kann auch nicht \lim\_{a \to x} f(a) =y gelten. Damit folgt die Notwendigkeit der angegebenen Bedingung.

 Um einzusehen, dass sie hinreichend ist, nehmen wir an, dass sie erfüllt ist. Sei \mklm{a\_n} eine beliebige Folge mit x\not=a\_n und a\_n \to x, sowie \epsilon>0 gegeben. Dann existiert ein \delta>0, so dass

\forall a \in A mit 0 < d\_X(a,x) < \delta: d\_Y(f(a),y) < \epsilon.

Da a\_n \to x, existiert ein N \in \N, so dass d\_X(a\_n,x) <\delta für alle n \geq N. Somit ist d\_Y(f(a\_n),y) <\epsilon für alle n \geq N und wir erhalten f(a\_n) \to y. Damit ist alles bewiesen.

Ist der Bildraum vollständig, so verfügen wir über ein zusätzliches Kriterium für die Existenz von \lim\_{a \to x} f(a) .

2.1.7 Satz:[Cauchy–Kriterium]

Seien (X,d\_X), (Y,d\_Y) wie zuvor metrische Räume, A\subset X eine Teilmenge, f: A \rightarrow Y eine Abbildung und x \in X ein Häufungspunkt von A. Sei zudem Y vollständig. Dann existiert \lim\_{a \to x} f(a) genau dann, falls

\forall \epsilon>0 \exists \delta >0: \forall a\_1,a\_2 \in A mit 0 < d\_X(a\_i,x) < \delta: d\_Y(f(a\_1),f(a\_2)) < \epsilon.

Beweis:

Sei zunächst \lim\_{a \to x} f(a) =y für ein y \in Y, sowie \epsilon>0 gegeben. Nach Satz 2.1.6 existiert ein \delta>0 dergestalt, dass

 \forall a \in A mit 0 < d\_X(a,x) < \delta: d\_Y(f(a),y) < \epsilon.

Seien nun a\_1,a\_2 \in A derart, dass 0 < d\_X(a\_i,x) < \delta gilt. Dann folgt mittels der Dreiecksungleichung

 d\_Y(f(a\_1),f(a\_2))\leq d\_Y(f(a\_1),x)+ d\_Y(x,f(a\_2)) \leq 2\epsilon.

Also ist die Bedingung notwendig.

Wir gehen nun davon aus, dass die Bedingung erfüllt ist. Für gegebenes \epsilon>0 sei also \delta>0 wie in der Bedingung. Sei weiter \mklm{a\_n} eine beliebige Folge mit x\not=a\_n und a\_n \to x, sowie N \in \N derart, dass d\_X(a\_n,x)<\delta für alle n \geq N. Dann aber gilt

 d\_Y(f(a\_n),f(a\_m)) < \epsilon \forall n,m \geq N.

Damit bilden die Bildpunkte \mklm{f(a\_n)} eine Cauchy–Folge in Y, welche aufgrund der Vollständigkeit von Y konvergieren muss. Wir haben somit gezeigt, dass für jede Folge \mklm{a\_n} mit x\not=a\_n und a\_n \to x die Folge der Bildpunkte \mklm{f(a\_n)} konvergent ist. Einzusehen bleibt, dass alle so entstehenden Grenzwerte gleich sind. Seien also \mklm{a\_n}, \mklm{\tilde a\_n} zwei solche Folgen mit

\lim\_{n\to \infty} f(a\_n)=y, \lim\_{n\to \infty} f(\tilde a\_n)=\tilde y.

Wir bilden alsdann die Folge

b\_n:= a\_k falls n=2k

b\_n:= \tilde a\_k falls n=2k-1.

 \mklm{ b\_n} ist ebenfalls eine Folge mit x\not=b\_n und b\_n \to x, so dass \lim f(b\_n)=:z\in Y existiert. Nun aber stellt \mklm{f(b\_{2k})}=\mklm{f(a\_k}) eine Teilfolge von \mklm{f(b\_n)} dar, welche ebenfalls gegen z konvergieren muss. Aufgrund von Proposition 1.2.2 muss dann y=z gelten. Insgesamt sieht man hierdurch ein, dass \tilde y=z =y gilt und wir erhalten die Behauptung des Satzes.

 Als nächstes halten wir folgenden offensichtlichen Sachverhalt fest.

2.1.8 Proposition:

Seien (X,d) und (Y\_1,d\_1), \dots, (Y\_k,d\_k) metrische Räume, A\subset X eine Teilmenge und

f=(f\_1,\dots,f\_k):A \longrightarrow Y=Y\_1 \times \dots \times Y\_k

eine Abbildung, wobei f\_i:A \rightarrow Y\_i. Seien weiter y\_i \in Y\_i, x \in A^h.

Dann gilt \lim\_{a \to x} f(a) = (y\_1, \dots, y\_k) genau dann, falls \lim\_{a \to x} f\_i(a) = y\_i für alle 1 \leq i\leq k.

 \qed

 Der nächste Satz ist ebenfalls unmittelbar klar.

 2.1.9 Satz:

 Sei (X,d) ein metrischer Raum, A \subset X eine Teilmenge und x \in A^h. Desweiteren seien Y=\rn oder \C^n und f,g: A \rightarrow Y Abbildungen derart, dass \lim\_{a \to x} f(a) und \lim\_{a \to x} g(a) existieren. Dann gelten folgende Behauptungen:

 Aufzählungsanfang

1. Der Grenzwert \lim\_{a \to x} (f+g)(a) existiert ebenfalls und

 \lim\_{a \to x} (f+g)(a)=\lim\_{a \to x} f(a)+\lim\_{a \to x} g(a).

1. Der Grenzwert \lim\_{a \to x} \eklm{f(a), g(a)} existiert und

 \lim\_{a \to x} \eklm{f(a), g(a)} =\eklm{\lim\_{a \to x} {f(a)},\lim\_{a \to x} { g(a)} }

(3) Angenommen, n=1 und \lim\_{a \to x} g(a)\not=0. Dann existiert auch \lim\_{a \to x} (f/g)(a) und

 \lim\_{a \to x} (\frac{f}/{g}# )(a)=\frac{ \lim\_{a \to x} f(a)}/{ \lim\_{a \to x}# g(a)}.

 Aufzählungsende

 \qed

 Analog zur Definition der Konvergenz einer Folge reeller Zahlen gegen \pm \infty treffen wir nun folgende

2.1.10 Definition:

Sei (X,d) ein metrischer Raum und Y=\R. Wir sagen dann, dass \lim\_{a \to x} f(a) existiert und gleich \pm \infty ist, falls für jede beliebige Folge \mklm{a\_n} aus A mit a\_n \to x und a\_n \not=x die Folge \mklm{f(a\_n)} gegen \pm \infty konvergiert.

 Offensichtlich gilt dann folgendes

 2.1.11 Lemma:

Sei x ein Häufungspunkt einer Teilmenge A\subset X eines metrischen Raumes (X,d) und f:A \rightarrow \R eine Abbildung. Dann gilt \lim\_{a \to x} f(a)=+\infty genau dann, falls

 \forall M>0 \exists \delta>0: f(a)>M \forall a \in A mit d(x,a) < \delta.

 \qed

2.1.12 Beispiel:

Sei X=\R^2 und A=\R^2-\mklm{(0,0)}, sowie f(x,y)=(x^4+y^4)^{-1}.

Dann gilt \lim\_{a \to (0,0)} f(x,y) = +\infty.

2.1.13 Definition:

Sei X=\R, A=]a,\infty[ und (Y,d\_Y) ein metrischer Raum. Ist f:A \rightarrow Y eine Abbildung, so sagt man, dass \lim\_{a \to \infty} f(a) existiert, falls für jede Folge \mklm{a\_n} in A mit a\_n \to \infty die Folge der Bildpunkte \{f(a\_n)\} in Y gegen denselben Grenzwert y \in Y konvergiert. In diesem Fall schreibt man

 \lim\_{a \to \infty} f(a)=y.

 Abermals ist unschwer folgender Sachverhalt einzusehen.

 2.1.14 Lemma:

 Mit den Bezeichnungen aus der vorigen Definition gilt \lim\_{a \to \infty} f(a)=y genau dann, falls

 \forall \epsilon>0 \exists M>0: d\_Y(f(a),y) < \epsilon \forall a >M.

 \qed

2.1.15 Beispiel:

Sei X=\R, A=]a,\infty[ und Y=\C, sowie f(t) =e^{it}/t. Dann gilt \lim\_{t \to \infty} f(t)=0.

2.1.16 Definition:[Einseitige Grenzwerte]

Sei A\subset \R, (Y,d\_Y) ein beliebiger metrischer Raum und x \in \R. Angenommen, für jede Folge \mklm{a\_n} aus A mit a\_n <x und a\_n \to x gilt \lim\_{n \to \infty} f(a\_n) =y für ein y \in Y. Dann sagt man, dass der Grenzwert

\lim\_{a \to x^-} f(a):=y

existiert und nennt diesen den {linksseitigen Grenzwert von f in x}. Ebenso definiert man den -so er denn im obigen Sinne existiert- {rechtsseitigen Grenzwert von f in x} und bezeichnet diesen mit

 \lim\_{a \to x^+} f(a).

2.1.17 Proposition:

Seien m,M \in \R und m <M, sowie f:(m,M) \rightarrow \R eine monoton wachsende Funktion. Dann besitzt f in jedem Punkt x \in (m,M) einen links– bzw. rechtseitigen Grenzwert und es gilt

 \lim\_{a \to x^-} f(a) = \sup \mklm{f(t): m<t<x}, \lim\_{a \to x^+} f(a) = \inf \mklm{f(t): x<t<M}.

 Beweis:

 Da f monoton wächst, ist die Menge \mklm{f(t): m<t<x} von oben durch f(x) beschränkt, so dass

 \alpha:= \sup \mklm{f(t): m<t<x} \leq f(x).

 Nun existiert nach Definition des Supremums für jedes \epsilon>0 ein m<t\_0<x mit \alpha -\epsilon < f(t\_0) und aufgrund der Monotonizität von f gilt

 \alpha - \epsilon < f(t) \leq \alpha \forall t \in [t\_0,x).

 Obige Überlegungen bedeuten dann, dass für jedes \epsilon>0 ein \delta>0 existiert derart, dass |\alpha -f(t)| < \epsilon für alle t<x mit x-t< \delta gilt. Damit existiert der linksseitige Grenzwert \lim\_{a \to x^-} f(a) und ist gleich \alpha. Entsprechend zeigt man die Behauptung bezüglich des rechtsseitigen Grenzwertes.

Im Folgenden Satz berechnen wir einige Grenzwerte.

2.1.18 Satz:

Es gilt:

 Aufzählungsanfang

1. Für jedes a>1 gilt \lim\_{x \to \infty} \frac{a^x}\{x}# = +\infty.
2. \lim\_{x \to 0} \frac{\ln (x+1)}/{x}# =1.
3. \lim\_{x \to 0} (1+x)^{1/x}=e.
4. \lim\_{x \to \infty} \frac{x}/{\ln x}# = +\infty.

 Aufzählungsende

 Beweis:

 Nach Lemma 1.5.34 gilt die Reihenentwicklung

 a^x=1+ \frac {x\ln a}/{1!}# + \frac{x^2 (\ln a)^2}/{2!}# + \cdots,

 so dass offenbar

 \frac{a^x}/{x}# \geq \frac{x (\ln a)^2}/{2}# .

 Im Limes x \to \infty folgt dann (1). Unter Berücksichtigung von (Übung)

 \frac{x}/{x+1}# \leq \ln(1+x) \leq x für -1< x

 berechnet man jeweils

 \frac{1}/{1+x}# \leq \frac { \ln (1+x)}/{x}# \leq 1 für x>0, 1 \leq \frac{ln(1+x)}\{x}# \leq \frac{1}/{1+x}# für -1<x<0.

 Im Limes x \to 0 erhalten wir hiermit (2). Zum Beweis von (3) erinnern wir daran, dass nach Satz 1.5.30 (6) die Ungleichung |e^z-1| \leq |z| (e-1) für |z|\leq 1 gilt. Sei nun x\_n \to 0 eine Nullfolge und definiere z\_n:=\ln(1+x\_n)/x\_n-1. Nach (2) ist \mklm{z\_n} eine Nullfolge. Insbesondere ist somit für hinreichend großes n offenbar |z\_n|<1, so dass im Limes n \to \infty

|\exp(z\_n)-1|\leq |\ln(1+x\_n)/x\_n-1|(e-1) \to 0.

Also ist \lim\_{n \to \infty} \exp(z\_n)=1, was äquivalent zu \lim\_{n \to \infty}(1+x\_n)^{1/x\_n}=e ist. Um schließlich (4) einzusehen, setzen wir y=\ln x, so dass x/\ln x=e^y/y. Für x \to \infty gilt y \to \infty, so dass mit (1)

 \lim\_{x \to \infty} \frac{x}\{\ln x}# =\lim\_{y \to \infty} e^y/y= +\infty.

Wir kommen nun zur Definition der Stetigkeit in einem Punkt.

2.1.19 Definition:

 Seien (X,d\_X) und (Y,d\_Y) metrische Räume. Eine Abbildung f:X \rightarrow Y heißt {stetig im Punkt x\_0\in X}, falls für jede Folge x\_n \to x\_0, die auch teilweise oder ganz mit x\_0 übereinstimmen darf, \lim\_{n\to \infty} f(x\_n)=f(x\_0) gilt.

2.1.20 Definition:

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Ein Punkt x \in X, der kein Häufungspunkt von X ist, wird isolierter Punkt von X genannt.

2.1.21 Satz:

 Seien (X,d\_X) und (Y,d\_Y) metrische Räume, sowie f:X \rightarrow Y eine Abbildung. Dann gilt:

Aufzählungsanfang

1. f ist in allen isolierten Punkten von X stetig.
2. Ist x\_0 \in X^h ein Häufungspunkt, so gilt f ist stetig in x\_0 \Longleftrightarrow f(x\_0)= \lim\_{x \to x\_0} f(x).

Aufzählungsende

Beweis:

Angenommen, x\_0 ist ein isolierter Punkt von X. Dann existiert eine Kugel um x\_0 mit K(x\_0,\epsilon)=\mklm{x\_0}. Die Glieder einer gegen x\_0 konvergenten Folge \mklm{x\_n} müssen somit ab einem bestimmten n mit x\_0 übereinstimen. Dann aber gilt trivialerweise \lim\_{n\to \infty} f(x\_n)=f(x\_0) und wir erhalten (1).

Sei x\_0 \in X^h. Um (2) einzusehen, gehen wir zunächst davon aus, f stetig in x\_0 ist. Dann gilt f(x\_n) \to f(x\_0) für jede Folge x\_n \to x\_0, also insbesondere auch für Folgen mit x\_n \not=x\_0. Nach Definition 2.1.3 ist somit f(x\_0)= \lim\_{x \to x\_0} f(x). Um die Gegenrichtung einzusehen, sei f(x\_0)= \lim\_{x \to x\_0} f(x). Sei weiter \mklm{x\_n} eine gegen x\_0 konvergente Folge und \mklm{x\_{n\_k}} die Teilfolge aller Glieder mit x\_{n\_k}\not= x\_0. Angenommen, \mklm{x\_{n\_k}} hat nur endlich viele Glieder. Dann stimmen ab einem gewissen n die Glieder der Folge \mklm{x\_n} mit x\_0 überein, so dass offenbar \lim\_{n \to \infty} f(x\_n)=f(x\_0) folgt. Wir betrachten somit den Fall, dass \mklm{x\_{n\_k}} unendlich viele Glieder hat. Nach Voraussetzung existiert für jedes \epsilon>0 ein K\in \N mit

d\_Y(f(x\_{n\_k}),f(x\_0)) < \epsilon \forall k \geq K.

 Setzt man also N=n\_K, so gilt

 d\_Y(f(x\_n),f(x\_0)) < \epsilon \forall n \geq N

 und es folgt f(x\_n) \to f(x\_0). Da die Folge \mklm{x\_n} beliebig war, ist f stetig in x\_0.

2.1.22 Beispiel:

 Auf dem diskreten metrischen Raum ist jede Funktion f:X \rightarrow Y stetig, da jeder Punkt ein isolierter Punkt ist.

2.1.23 Satz:

Seien X und Y metrische Räume. Eine Funktion f:X \rightarrow Y ist genau dann stetig in x\_0, wenn es für jede \epsilon–Kugel um f(x\_0) eine \delta–Kugel um x\_0 gibt derart, dass

K(x\_0, \delta) \subset f^{-1}(K(f(x\_0), \epsilon)),

also falls das Urbild jeder offenen Kugel um f(x\_0) eine offene Kugel um x\_0 enthält.

Beweis:

Die Bedingung ist hinreichend: Denn sei \mklm{x\_n} eine gegen x\_0 konvergente Folge, \epsilon>0 gegeben und \delta>0 wie in der Bedingung. Dann existiert ein N \in \N mit x\_n\in K(x\_0,\delta)\subset f^{-1}(K(f(x\_0), \epsilon) für alle n \geq N. Also ist f(x\_n) \subset K(f(x\_0), \epsilon) und somit f(x\_n) \to f(x\_0).

Die Bedingung ist notwendig: Denn angenommen sie gilt nicht. Dann existiert ein \epsilon>0 derart, dass für jedes \delta>0

K(x\_0, \delta) \not \subset f^{-1}(K(f(x\_0), \epsilon)).

Wir betrachten alsdann die Sequenz \delta=1,1/2,1/3, \dots und erhalten eine Folge \mklm{x\_n} mit d(x\_n,x\_0) < 1/n und f(x\_n) \not \in K(f(x\_0), \epsilon). Damit stellt \mklm{x\_n} eine gegen x\_0 konvergente Folge dar, deren Bildpunkte \mklm{f(x\_n)} jedoch nicht gegen f(x\_0) konvergieren. Demzufolge kann f nicht stetig bei x\_0 sein.

Als Konsequenz erhalten wir

2.1.24 Korollar:

Aufzählungsanfang

1. Seien X,Y\_1,\dots, Y\_k metrische Räume. Eine Funktion f=(f\_1,\dots,f\_k): X \rightarrow Y=Y\_1\times \dots \times Y\_k ist genau dann stetig in x\_0, falls alle Komponentenfunktionen f\_i:X\rightarrow Y\_i stetig in x\_0 sind.
2. Seien f,g:X \rightarrow \K^n Funktionen, welche in x\_0 stetig sind. Dann sind auch f+g, \eklm{f,g} sowie (falls n=1 und g(x\_0)\not=0) f / g in x\_0 stetig.

Aufzählungsende

Beweis:

Die Aussagen ergeben sich unmittelbar aus vorigem Satz zusammen mit Proposition 2.1.8 und Satz 2.1.9.

2.1.25 Beispiel:

Offenbar ist f:\C\rightarrow \C:z \mapsto z stetig in allen Punkten z. Nach vorigem ist dann auch jedes Polynom P(z)=a\_kz^k + \cdots + a\_1 z + a\_0 stetig in allen Punkten z. Ist weiter Q(z) ein weiteres Polynom mit Nullstellenmenge A, so ist P/Q: \C-A \rightarrow \C in allen Punkten z \in \C-A stetig.

2.1.26 Satz:

Seien X,Y,Z metrische Räume und f:X \rightarrow Y, g:Y \rightarrow Z zwei Abbildungen. Ist f in x\_0\in X und g in f(x\_0)\in Y stetig, so ist g \circ f in x\_0 stetig.

 Beweis:

 Sei \epsilon>0 gegeben. Nach Voraussetzung existiert ein \delta>0 mit K\_Y(f(x\_0),\delta) \subset g^{-1} (K\_Z((g\circ f)(x\_0),\epsilon)). Zu diesem \delta existiert jedoch wiederum ein \chi>0 mit K\_K(x\_0,\chi) \subset f^{-1}(K\_Y(f(x\_0),\delta)). Insgesamt erhalten wir somit

 K\_K(x\_0,\chi) \subset f^{-1}(K\_Y(f(x\_0),\delta))

\subset f^{-1} (g^{-1} (K\_Z((g\circ f)(x\_0),\epsilon)) )

\subset (g \circ f)^{-1} (K\_Z((g\circ f)(x\_0),\epsilon))

und infolge von Satz 2.1.23 die Behauptung.

2.1.27 Proposition:

Aufzählungsanfang

1. Die Logarithmusfunktion \ln: \R\_+ \rightarrow \R, x \mapsto \ln x ist stetig in allen Punkten x \in \R\_+.
2. f:\R\_+ \times \C, f(x,z) =x^z ist stetig in allen Punkten (x,z) \in \R\_+ \times \C. Insbesondere ist z \mapsto a^z in jedem Punkt z \in \C stetig für jedes a>0.

 Aufzählungsende

 Beweis:

 Sei \mklm{x\_n} eine gegen x\_0\in \R\_+ konvergente Folge, so dass (x\_n-x\_0)/x\_0 \to 0. Unter Verwendung von

 \frac{y}/{y+1}# \leq \ln (1+y) \leq y, y>-1,

 berechnet man für y= (x\_n-x\_0)/x\_0

 \frac{\frac{x\_n-x\_0}/{x\_0}#}/{1+\frac{x\_n-x\_0}/{x\_0}#}# \leq \ln ( 1 + \frac{x\_n-x\_0}/{x\_0}# ) \leq \frac{x\_n -x\_0}/{x\_0}#.

Hieraus aber folgt im Limes n \to \infty

0\leq \lim\_{n \to \infty} \ln ( 1 + \frac{x\_n-x\_0}/{x\_0}# )\leq 0,

so dass \lim\_{n \to \infty} \ln ( 1 + \frac{x\_n-x\_0}/{x\_0}# )=\lim\_{n \to \infty} \ln ( \frac{x\_n}/{x\_0}# )=0 und somit \lim\_{n\to \infty} \ln (x\_n) =\ln(x\_0) folgt. Also ist die Logarithmusfunktion stetig und wir erhalten (1). Um (2) einzusehen, betrachten wir einen Punkt (x\_0,z\_0) \in \R\_+ \times \C und eine gegen diesen Punkt konvergente Folge \mklm{(x\_n,z\_n)}. Man berechnet dann

|x\_n^{z\_n}-x\_0^{z\_0}| = |\exp ( \ln(x\_n) z\_n) -\exp( \ln(x\_0) z\_0)|=|\exp( \ln(x\_0) z\_0)| | \exp ( \ln(x\_n) z\_n- \ln(x\_0)z\_0) -1 |

 Nun gilt infolge von (1) und der Voraussetzung z\_n \to z\_0, dass \ln(x\_n) z\_n\to \ln(x\_0)z\_0. Mit Satz 1.5.30 (6) gilt somit für hinreichend großes n

|x\_n^{z\_n}-x\_0^{z\_0}|\leq|\exp( \ln(x\_0) z\_0)| (e-1) |\ln(x\_n) z\_n- \ln(x\_0)z\_0|

und wir erhalten (2).

2.1.28 Proposition:

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann ist die Metrik d:X \times X \to \R stetig in allen Punkten (x,y) \in X \times X.

Beweis:

Sei \mklm{(x\_n, y\_n)} eine gegen (x,y)\in X\times X konvergente Folge. Zu zeigen ist, dass d(x\_n,y\_n) \to d(x,y). Mittels zweifacher Anwendung der Dreiecksungleichung ist nun

 d(x\_n,y\_n) - d(x,y)\leq d(x\_n,y) + d(y,y\_n)- d(x,y)\leq d(x\_n,x)+ d(x,y) -d(x,y) + d(y,y\_n).

 Entsprechend sieht man, dass

d(x,y) \leq d(x,x\_n)+d(x\_n,y\_n) + d(y\_n, y), also -d(x,x\_n) - d(y,y\_n) \leq d(x\_n,y\_n)-d(x,y) gilt, so dass insgesamt

|d(x\_n,y\_n) - d(x,y)|\leq d(x\_n,x) + d(y,y\_n).

Da die rechte Seite gegen null konvergiert, erhalten wir insgesamt die Behauptung.

## 2.2 Eigenschaften stetiger Funktionen

2.2.1 Definition:

Seien X,Y metrische Räume. Eine Abbildung f:X \rightarrow Y wird {stetig} genannt, falls sie in jedem Punkt x \in X stetig ist.

Der folgende Sachverhalt reduziert den Stetigkeitsbegriff auf eine topologische Eigenschaft und ist entsprechend von konzeptioneller Bedeutung.

2.2.2 Satz:

Seien X,Y metrische Räume. Eine Abbildung f:X \rightarrow Y ist genau dann stetig, falls für jede offene Menge U \subset Y das Urbild f^{-1}(U) offen ist.

Beweis:

Sei f stetig und U\subset Y eine offene Menge. Ist f^{-1}(U) leer, so ist die Behauptung klar. Sei also x\_0\in f^{-1}(U), mithin f(x\_0) \in U. Da U offen ist, existiert ein \epsilon>0 mit K(f(x\_0),\epsilon)\subset U. Andererseits impliziert die Tatsache, dass f stetig in x\_0 ist, die Existenz eines \delta>0 derart, dass

K(x\_0,\delta)\subset f^{-1} (K(f(x\_0),\epsilon)) \subset f^{-1}(U).

Da x\_0 \in f^{-1}(U) beliebig war, ist f^{-1}(U) offen.

 Sei umgekehrt f^{-1}(U) offen für jede offene Menge U\subset Y und x\_0 \in X, \epsilon>0 gegeben. Da die \epsilon-Kugel um f(x\_0) offen in Y ist, muss folglich f^{-1}(K(f(x\_0),\epsilon)) offen in X sein. Wegen x\_0 \in f^{-1}(K(f(x\_0),\epsilon)) muss somit ein \delta>0 existieren derart, dass K(x\_0,\delta) \subset f^{-1}(K(f(x\_0),\epsilon)). Nach Satz 2.1.23 ist somit f stetig in x\_0.

2.2.3 Bemerkung:

Eine Abbildung f:X\rightarrow Y ist auch genau dann stetig, falls das Urbild abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen ist. Andererseits ist die konstante Funktion f(x)=y\_0 ein Gegenbeispiel dafür, dass stetige Funktionen offene bzw. abgeschlossene Mengen wieder auf solche abbilden.

Mit dem letzten Satz folgert man sofort, dass die Verknüpfung zweier stetiger Abbildungen ebenfalls stetig ist. Jedoch zeigt das folgende Beispiel, dass die Umkehrfunktion einer bijektiven stetigen Abbildung im Allgemeinen nicht wieder stetig zu sein braucht.

2.2.4 Beispiel:

Sei X=[0,1[ \cup \mklm{2}, Y= [0,1] und f(t)=t für t \in [0,1[ und f(2)=1. Dann ist f stetig, jedoch deren Umkehrfunktion offenbar nicht.

Dies führt zu folgender Begriffsbildung.

2.2.5 Definition:

Seien X,Y metrische Räume. Eine Abbildung f:X \rightarrow Y heißt {Homöomorphismus}, falls f bijektiv und stetig ist und die Umkehrabbildung oder inverse Abbildung ebenfalls stetig ist.

2.2.6 Definition:

 Zwei metrische Räume X,Y heißen {homöomorph}, falls zwischen ihnen ein Homöomorphismus existiert und man schreibt X\simeq Y.

2.2.7 Bemerkung:

Seien X,Y,Z metrische Räume. Weil Stetigkeit bei Verknüpfung erhalten bleibt, folgt aus X\simeq Y und Y\simeq Z, dass X\simeq Z.

2.2.8 Beispiel:

Der n-dimensionale euklidische Raum \rn ist homöomorph zur Vollkugel \mklm{x \in \rn: |x|<1} aufgrund des Homöomorphismus

f: \mklm{x \in \rn: |x|<1} \longrightarrow \rn, f(x) =\frac{x}/{1-|x|}# .

 Wir kommen nun zu einer wichtigen Aussage über Bilder kompakter Mengen.

 2.2.9 Satz:

 Seien X und Y metrische Räume, X kompakt und f:X\rightarrow Y eine stetige Abbildung. Dann ist auch f(X) als Teilmenge in Y kompakt. Gilt insbesondere X\simeq Y, so ist auch Y kompakt.

Beweis:

 Wir betrachten eine beliebige Folge \mklm{y\_n} in f(X) und wählen eine ensprechende Folge \mklm{x\_n} in X mit y\_n=f(x\_n). Da der Raum X kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge \mklm{x\_{n\_k}}, welche gegen ein Element x\_0 \in X konvergiert. Aufgrund der Stetigkeit von f folgt aber dann für die Folge der Bildpunkte y\_{n\_k}=f(x\_{n\_k}) \to f(x\_0)\in f(X). Damit besitzt die Folge \mklm{y\_n} eine konvergente Teilfolge in f(X). Nach Definition ist somit f(X) kompakt.

2.2.10 Beispiel:

Das Intervall [a,b] ist kompakt, \R jedoch nicht. Obigem Satz zufolge kann somit keine stetige, surjektive Abbildung von [a,b] nach \R existieren und insbesondere [a,b] nicht homöomorph zu \R sein.

2.2.11 Korollar:

Ist X ein kompakter und Y ein beliebiger metrischer Raum, so ist jede stetige, bijektive Abbildung f:X \rightarrow Y ein Homöomorphismus.

 Beweis:

 Zu beweisen ist die Stetigkeit der Umkehrabbildung f^{-1}:Y \rightarrow X. Sei also U\subset X eine offene Menge. Nach Satz 2.2.2 reicht es zu zeigen, dass das Urbild der Umkehrabbildung (f^{-1})^{-1}(U)=f(U) offen ist. Da X-U abgeschlossen ist, ist X-U infolge der Kompaktheit von X auch kompakt. Nach Satz 2.2.9 ist somit f(X-U) ebenfalls kompakt und insbesondere abgeschlossen. Da jedoch f(X-U)=Y-f(U), folgt schließlich, dass f(U) offen ist.

Eine der wesentlichen Eigenschaften reellwertiger, stetiger Funktionen ist die, dass sie auf Kompakta ihr Infimum bzw. Supremum annehmen.

2.2.12 Satz:[Satz von Weierstrass]

 Sei X ein kompakter metrischer Raum und f:X \rightarrow \R eine stetige Funktion. Dann existieren jeweils Punkte x\_m und x\_M in X derart, dass

 f(x\_m)=m=\inf \mklm{f(x): x \in X}, f(x\_M)=M=\sup \mklm{f(x): x \in X}.

 Beweis:

 Nach Satz 2.2.9 ist f(X) kompakt, also abgeschlossen und beschränkt. Der Beschränktheit zufolge sind |m|,|M|<\infty endliche Zahlen, und der Abgeschlossenheit zufolge gilt m,M \in f(X). Also existieren Punkte x\_m und x\_M in X derart, dass f(x\_m)=m und f(x\_M)=M gilt.

Wir führen als nächstes einen stärkeren Stetigkeitsbegriff ein. Seien X,Y metrische Räume. Wir erinnern daran, dass eine Abbildung f:X \rightarrow Y als stetig bezeichnet wurde, falls

 \forall x \in X, \epsilon>0 \exists \delta=\delta(x,\epsilon) sodass

K(x,\delta) \subset f^{-1}(K(f(x),\epsilon)).

2.2.13 Definition:

Eine Abbildung f:X\rightarrow Y wird {gleichmäßig stetig} genannt, falls

\forall \epsilon>0 \exists \delta=\delta(\epsilon): K(x,\delta) \subset f^{-1}(K(f(x),\epsilon)) \forall x \in X.

2.2.14 Bemerkung:

Offensichtlich impliziert gleichmäßige Stetigkeit Stetigkeit.

Im Allgemeinen folgt aus Stetigkeit jedoch keine gleichmäßige Stetigkeit. So ist die Funktion f:(0,1)\rightarrow \R, f(x) = 1/x stetig, aber nicht gleichmäßig stetig auf (0,1).

Der folgende Satz besagt, dass auf kompakten Räumen Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit übereinstimmen.

2.2.15 Satz:[Satz von Heine]

Ist X ein kompakter und Y ein beliebiger metrischer Raum, so ist jede stetige Abbildung f:X \rightarrow Y auch gleichmäßig stetig.

Beweis:

Angenommen, die Abbildung f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann existiert ein \epsilon>0 derart, so dass für jedes \delta>0 ein x \in X existiert mit

K(x,\delta) \not \subset f^{-1}(K(f(x),\epsilon))

 Setzen wir insbesondere \delta=1,2,3,\dots, so erhalten wir zwei Folgen \mklm{x\_n} und \mklm{\tilde x\_n} in X mit d(x\_n,\tilde x\_n)<1/n und d(f(x\_n),f(\tilde x\_n))\geq \epsilon. Nun aber ist nach Voraussetzung X kompakt, so dass die Folgen \mklm{x\_n} und \mklm{\tilde x\_n} konvergente Teilfolgen besitzen müssen. Es existieren also Indizes n\_{k\_1}<n\_{k\_2}<n\_{k\_3}< \cdots derart, dass x\_{n\_{k\_l}} \to x\_0, \tilde x\_{n\_{k\_l}} \to \tilde x\_0 gilt. Die Stetigkeit von f impliziert dann f(x\_{n\_{k\_l}}) \to f(x\_0), \tilde f(x\_{n\_{k\_l}}) \to f( \tilde x\_0). Nun aber ist

d(x\_0,\tilde x\_0) \leq d(x\_0,x\_{n\_{k\_l}})+d(x\_{n\_{k\_l}},\tilde x\_{n\_{k\_l}}) + d(\tilde x\_{n\_{k\_l}},\tilde x\_0),

 so dass im Limes l \to \infty infolge von d(x\_n,\tilde x\_n)<1/n offenbar x\_0=\tilde x\_0 folgt. Da jedoch gleichzeitig d(f(x\_{n\_{k\_l}}),f(\tilde x\_{n\_{k\_l}}))\geq \epsilon gilt, muss f(x\_0)\not=f(\tilde x\_0) gelten, Widerspruch. Also kann f nicht stetig bei x\_0 sein und wir erhalten insgesamt die Behauptung.

 Der nächste Satz befaßt sich mit zusammenhängenden Räumen und stetigen Abbildungen.

 2.2.16 Satz:

Seien X und Y metrische Räume, X zusammenhängend und f:X\rightarrow Y eine stetige Abbildung. Dann ist auch f(X) als Teilmenge in Y zusammenhängend. Sind insbesondere X und Y homöomorph, so ist auch Y zusammenhängend.

Beweis:

Angenommen, f(X) ist nicht zusammenhängend. Dann existieren offene und disjunkte Mengen V\_1, V\_2\subset Y dergestalt, dass f(X) \subset V\_1 \cup V\_2 und f(X) nicht-leeren Durchschnit mit ihnen hat.

Nach Satz 2.2.2 sind die Mengen U\_i:=f^{-1}(V\_i) offen. Weiterhin ergibt sich aus den entsprechenden Eigenschaften für die Mengen V\_i, dass

U\_1 \cup U\_2 =X,

U\_1 \cap U\_2 =\emptyset,

U\_1 und U\_2 sind nicht leer.

Dann aber wäre X nicht zusammenhängend, Widerspruch.

2.2.17 Korollar: [Zwischenwertsatz von Darboux]

Sei X ein metrischer Raum und f:X \rightarrow \R eine stetige Funktion, sowie X zusammenhängend. Ist a<b<c und gilt a,c \in f(X), so ist auch b \in f(X).

Beweis:

Da die zusammenhängenden Mengen von \R genau die Intervalle sind, ergibt sich die Aussage unmittelbar aus obigem Satz.

## 2.3 Folgen stetiger Funktionen

 In diesem Abschnitt werden wir uns mit Folgen von Abbildungen befassen. Seien im Folgenden X und Y metrische Räume und f\_n:X \rightarrow Y eine Folge von Abbildungen.

2.3.1 Definition:

Eine Folge f\_n:X\rightarrow Y { konvergiert punktweise} gegen eine Abbildung f:X\rightarrow Y, falls

 \lim\_{n \to \infty} f\_n(x) =f(x) \forall x \in X.

 In diesem Fall schreibt man f\_n \to f.

Wie das folgende Beispiel zeigt, überträgt sich bei punktweiser Konvergenz die Eigenschaft der Stetigkeit nicht auf die Grenzfunktion.

2.3.2 Beispiel:

Wir betrachten die Funktionenfolge f\_n:[0,1]\rightarrow \R, x \mapsto x^n. Dann gilt

 \lim\_{n \to \infty} f\_n(x)=f(x):=\begin{cases} 0 & 0 \leq x<1 \ 1 & x=1. \end{cases}

 Damit konvergiert die Folge f\_n stetiger Funktionen punktweise gegen die nicht-stetige Funktion f.

 Der entscheidende Konvergenzbegriff ist folgender.

 2.3.3 Definition:

 Eine Folge f\_n:X\rightarrow Y konvergiert gleichmäßig gegen eine Abbildung f:X\rightarrow Y, falls

 \forall \epsilon>0 \exists N \in \N: d(f\_n(x),f(x)) < \epsilon \forall n \geq N, x \in X.

 In diesem Fall schreibt man f\_n \rightrightarrows f.

2.3.4 Satz:

Sind sämtliche Abbildungen f\_n stetig bzw. beschränkt und gilt f\_n \rightrightarrows f, so ist auch die Grenzfunktion f stetig bzw. beschränkt.

Beweis:

 Angenommen, die Funktionen f\_n sind stetig. Wegen f\_n \rightrightarrows f, existiert zu jedem gegebenem \epsilon>0 ein N \in \N mit d(f\_n(x),f(x)) < \epsilon für alle n \geq N und x \in X. Die Stetigkeit von f\_N in x\_0 impliziert weiter die Existenz eines \delta>0 derart, dass d(f\_N(x),f\_N(x\_0))< \epsilon, sofern d(x,x\_0)<\delta. Damit schließt man für alle x, x\_0 \in X mit d(x,x\_0)<\delta

 d(f(x),f(x\_0)) \leq d(f(x),f\_N(x))+ d(f\_N(x),f\_N(x\_0))+d(f\_N(x\_0), f(x\_0)) \leq 3 \epsilon.

 Damit ist f stetig in x\_0. Da x\_0 beliebig war, erhalten wir, dass f stetig ist.

 Seien nun sämtliche Abbildungen f\_n beschränkt. Die gleichmäßige Konvergenz bedeutet insbesondere, dass für ein hinreichend großes N \in \N die Ungleichung d(f\_N(x),f(x))<1 für alle x \in X gilt. Da jedoch f\_N beschränkt ist, existiert eine Kugel K(y\_0,M) in Y mit f\_N(X)\subset K(y\_0,M). Dann aber folgt f(X) \subset K(y\_0, M+1) und der Satz ist bewiesen.

2.3.5 Bemerkung:

Obiger Satz stellt eine Aussage über die Vertauschbarkeit doppelter Grenzwerte dar. In der Tat, ist f\_n eine Folge stetiger Funktionen, welche gleichmäßig gegen f konvergiert, so impliziert der Satz, dass

 \lim\_{x \to x\_0} ( \lim\_{n \to \infty} f\_n(x) ) = \lim\_{n \to \infty} ( \lim\_{x \to x\_0} f\_n(x) ) \forall x\_0 \in X.

Es existieren stetige Funktionenfolgen mit stetiger Grenzfunktion, die punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen letztere konvergieren. Betrachte so die Folge von Funktionen

 f\_n:[0,1] \rightarrow \R, x \mapsto nx(1-x^2)^n.

 Offenbar sind die Funktionen f\_n stetig und es gilt f\_n\to 0. Jedoch ist f\_n \not\rightrightarrows 0. Denn wäre dies der Fall, so müsste insbesondere ab einer Stelle N notwendig |f\_n(x)| \leq 1 für alle n \geq N und x \in [0,1] gelten. Infolge der Bernoulli–Ungleichung berechnet man jedoch für großes n

 f\_n (\frac{1}/{\sqrt{2n+1}}# )

=\frac{n}/{\sqrt{2n+1}}# ( 1-\frac{1}/{2n+1}# )^n

\geq \frac{n}/{\sqrt{2n+1}}# ( 1-\frac{n}/{2n+1}# )

= \frac{n(n+1)}/{(2n+1)^{3/2}}# \to \infty.

 Unter zusätzlichen Einschränkungen gilt eine gewisse Umkehrung obigen Satzes.

2.3.6 Satz:

Sei X ein kompakter metrischer Raum und f\_n:X \rightarrow \R eine Folge stetiger Funktionen mit der Eigenschaft, dass

 f\_n(x) \geq f\_{n+1}(x) \geq f\_{n+2}(x) \geq \dots \forall x \in X,

 und welche zudem punktweise gegen eine stetige Grenzfunktion f:X \rightarrow \R konvergiert. Dann konvergiert die Folge f\_n sogar gleichmäßig gegen f.

Beweis:

 Wir setzen g\_n:= f\_n-f. Dann ist g\_n \geq 0 sowie g\_n-g\_{n+1}=f\_n - f\_{n+1} \geq 0. Um zu zeigen, dass g\_n \rightrightarrows 0 gilt, betrachten wir ein beliebiges \epsilon>0.

 Da g\_n nach Voraussetzung punktweise gegen g=0 konvergiert, existiert zu jedem x \in X ein n=n(x) mit g\_n(x) \leq \epsilon/2. Nach Konstruktion bilden die Funktionen g\_n eine fallende Folge stetiger Funktionen, so dass für jedes x \in X eine offene Menge U\_x um x existiert mit

 0 \leq g\_n(z) \leq \epsilon \forall n \geq n(x), z \in U\_x.

Da X kompakt ist, besitzt die Überdeckung \mklm{U\_x}\_{x \in X} aufgrund der Borel–Lebesgueschen Überdeckungseigenschaft eines kompakten metrischen Raumes eine endliche Teilüberdeckung. Es existieren also Punkte x\_1,\dots,x\_k mit X=U\_{x\_1} \cup\dots \cup U\_{x\_k} und wir setzen M:=\max \mklm{n(x\_1), \dots, n(x\_k)}. Dann aber gilt

 0 \leq g\_n(z) \leq \epsilon \forall n \geq M, z \in X.

 Da \epsilon>0 beliebig war, erhalten wir somit g\_n\rightrightarrows 0 und damit f\_n \rightrightarrows f.

2.3.7 Definition:

Bezeichnen X und Y metrische Räume, so definieren wir die Funktionenräume

C(X,Y):= \mklm{f:X \rightarrow Y: f ist stetig}, B(X,Y):= \mklm{f:X \rightarrow Y: f ist beschränkt}

und definieren auf B(X,Y) eine Abstandsfunktion gemäß

 d(f,g):= \sup \mklm{d\_Y(f(x),g(x)): x \in X}, f,g \in B(X,Y) (Supremums-Metrik).

2.3.8 Satz:

Seien X und Y metrische Räume. Dann gelten die Aussagen:

Aufzählungsanfang

1. B(X,Y) ist ein metrischer Raum.
2. Eine Folge f\_n konvergiert genau dann in B(X,Y) gegen eine Funktion f \in B(X,Y), falls f\_n \rightrightarrows f.
3. Ist Y vollständig, so ist auch (B(X,Y),d) vollständig.
4. B(X,Y) \cap C(X,Y) ist eine abgeschlossene Teilmenge von B(X,Y).
5. Ist X kompakt, so ist C(X,Y) \subset B(X,Y).

 Aufzählungsende

Beweis:

 (1) Es gilt offensichtlich d(f,g)=d(g,f)\geq 0 und

 d(f,g)=0 \Longleftrightarrow f(x)=g(x) \forall x \in X \Longleftrightarrow f=g.

 Weiter berechnet man für f,g,h \in B(X,Y)

 d\_Y(f(x),g(x)) \leq d\_Y(f(x),h(x))+ d\_Y(h(x), g(x)) \leq d(f,h) + d(h,g), x \in X.

 Als kleinste oberste Schranke erfüllt dann das Supremum von \mklm{ d\_Y(f(x),g(x)) : x \in X} die Ungleichung d(f,g)\leq d(f,h) + d(h,g). Damit ist d eine Metrik auf B(X,Y).

(2) Es konvergiere die Folge f\_n in B(X,Y) gegen eine Funktion f \in B(X,Y). Nach Definition der Konvergenz in metrischen Räumen existiert somit zu jedem \epsilon>0 ein N \in \N derart, dass d(f\_n,f) < \epsilon für alle n \geq N. Dann aber ist

 d\_Y(f\_n(x),f(x)) \leq d(f\_n,f) <\epsilon \forall n \geq N, x \in X,

 was bedeutet, dass f\_n \rightrightarrows f. Sei nun umgekehrt \mklm{f\_n} eine Folge beschränkter Funktionen mit f\_n \rightrightarrows f. Für jedes \epsilon>0 existiert somit ein N \in \N derart, dass

 d\_Y(f\_n(x),f(x)) <\epsilon \forall n \geq N, x \in X.

 Geht man nun in der letzten Ungleichung zum Supremum über, so folgt d(f\_n,f)< \epsilon für alle n \geq N und somit die Konvergenz von \mklm{f\_n} in B(X,Y) gegen f.

 (3) Sei als nächstes Y vollständig und f\_n \in B(X,Y) eine Cauchy–Folge. Dann gilt

 \label{eq:14}

 \forall \epsilon>0 \exists N \in \N: d\_Y(f\_n(x),f\_m(x)) < \epsilon \forall n,m \geq N, x \in X.

 Für festes x \in X stellt somit \mklm{f\_n(x)} eine Cauchy–Folge in Y dar und ist somit konvergent. Wir definieren nun punktweise f:X \rightarrow Y durch f(x):= \lim f\_n(x). Geht man alsdann in \eqref{eq:14} mit m\to \infty, so folgt unter Benutzung von Proposition 2.1.28

 \forall \epsilon>0 \exists N \in \N: d\_Y(f\_n(x),f(x)) < \epsilon \forall n\geq N, x \in X.

 Dies aber bedeutet nichts anderes, als dass f\_n \rightrightarrows f. Infolge von Satz 2.3.4 ist dann f beschränkt. Nach (2) konvergiert somit \mklm{f\_n} in B(X,Y) gegen f. Also ist B(X,Y) vollständig.

 (4) Sei f\_n \in B(X,Y) \cap C(X,Y) eine Folge, welche in B(X,Y) gegen f \in B(X,Y) konvergiert. Nach (2) ist dann f\_n \rightrightarrows f, so dass wiederum mittels Satz 2.3.4 die Aussage f \in C(X,Y) folgt. Also ist B(X,Y) \cap C(X,Y) abgeschlossen in B(X,Y).

 (5) Infolge des Satzes 2.2.9 ist f(X) kompakt, falls f \in C(X,Y), also insbesondere beschränkt.

 Mit obigem Satz ergibt sich unmittelbar folgendes

2.3.9 Korollar:

 Sei X ein kompakter und Y ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist (C(X,Y),d) ein vollständiger metrischer Raum.

 \qed

 Im Folgenden soll ein weiterer Konvergenzbegriff für Funktionenfolgen eingeführt werden. Hierzu treffen wir zunächst folgende

2.3.10 Definition:

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Liegt jeder Punkt x \in X in einer \epsilon–Kugel K(x,\epsilon), deren Abschluß kompakt ist, so heißt X lokal–kompakt.

2.3.11 Beispiel:

Lokal–kompakte Räume sind

Jeder kompakte Raum ist lokal–kompakt.

\K^n ist lokal–kompakt.

Jede offene Teilmenge eines lokal–kompakten Raumes ist lokal–kompakt.

Der Körper der rationalen Zahlen \Q ist nicht lokal–kompakt. Denn ist q\_0 \in \Q eine beliebige rationale Zahl, so enthält für beliebiges \epsilon>0 nicht jede Folge in \overline{K(q\_0,\epsilon)}\subset \Q eine konvergente Teilfolge in \Q.

2.3.12 Definition:

Sei X ein lokal–kompakter metrischer Raum und Y ein beliebiger metrischer Raum. Eine Folge von Abbildungen f\_n:X \rightarrow Y {konvergiert fast gleichmäßig}, falls für jede kompakte Teilmenge K\subset X die Folge der Einschränkungen {f\_n}\_{|K}: K \rightarrow Y gleichmäßig gegen eine Funktion f\_K:K \rightarrow Y konvergiert.

2.3.13 Satz:

Sei X ein lokal–kompakter metrischer Raum und Y ein beliebiger metrischer Raum. Konvergiert die Folge f\_n:X\rightarrow Y fast gleichmäßig, so existiert eine Abbildung f:X \rightarrow Y derart, dass

{f\_n}\_{|K} \rightrightarrows {f}\_{|K}

 für jede kompakte Teilmenge K\subset X.

 Sind desweiteren alle f\_n stetig, so ist auch die Grenzfunktion f stetig.

Beweis:

 Nach Voraussetzung existiert für jedes Kompaktum K\subset X eine Funktion f\_K derart, dass {f\_n}\_{|K} \rightrightarrows {f}\_K. Insbesondere konvergieren die Einschränkungen {f\_n}\_{|K} auch punktweise gegen f\_K. Sind nun K\_1 und K\_2 kompakte Mengen und x \in K\_1\cap K\_2, so ist

 f\_{K\_1}(x)= \lim\_{n \to \infty} {f\_n}(x) = f\_{K\_2}(x).

Da X lokal–kompakt ist, existiert eine Überdeckung von X durch \epsilon–Kugeln, deren Abschluß jeweils kompakt ist. Damit erhalten wir eine global definierte Funktion f:X \rightarrow Y dergestalt, dass f\_{|K}=f\_K für jede kompakte Menge K\subset X.

Angenommen, die Funktionen f\_n sind stetig. Für beliebiges x\_0 \in X wählen wir jeweils ein \epsilon\_0>0 derart, dass \overline{K(x\_0,\epsilon)}=:K\_0 kompakt ist. Dann gilt {f\_n}\_{|K\_0} \rightrightarrows {f}\_{|K\_0}. Nach Satz 2.3.4 ist dann f auf K\_0 stetig. Insbesondere ist f also in x\_0 stetig. Damit folgt die Behauptung.

2.3.14 Beispiel:

 Wir betrachten die Funktionenfolge f\_n: \R \rightarrow \R, x \mapsto f\_n(x)=x/n. Offenbar konvergiert \mklm{f\_n} punktweise gegen die (stetige) Nullfunktion, aber nicht gleichmäßig, da \sup |f\_n(x)-0|=\infty für jedes n. Jedoch ist die Konvergenz fast gleichmäßig, da für jedes kompakte Intervall [-m,M] die Beziehung \sup \mklm{|f\_n(x)-0|: x \in [-m,M]}=\max(m,M)/n gilt.

###  Funktionenreihen

Sei X ein metrischer Raum, f\_n: X \rightarrow \K^n eine Folge von Funktionen und s\_n:=f\_1+\dots + f\_n die entsprechende Folge der Partialsummen.

2.3.15 Definition:

Angenommen, die Funktionenfolge s\_n der Partialsummen konvergiert punktweise, gleichmäßig bzw. fast gleichmäßig gegen eine Funktion s:X\rightarrow \K^n. Dann schreibt man

\sum\_{n=1}^\infty f\_n:=s

und spricht davon, dass die Reihe \sum\_{n=1}^\infty f\_n die entsprechende Eigenschaft hat.

 Als unmittelbare Konsequenzen von Satz 2.3.4 und 2.3.14 erhalten wir folgendes

2.3.16 Korollar:

Sind die Funktionen f\_n: X \rightarrow \K^n stetig und \sum\_{n=1}^\infty f\_n gleichmäßig konvergent, so ist \sum\_{n=1}^\infty f\_n ebenfalls stetig.

Sei X lokal kompakt. Sind die Funktionen f\_n: X \rightarrow \K^n stetig und \sum\_{n=1}^\infty f\_n fast gleich-\- mäßig konvergent, so ist \sum\_{n=1}^\infty f\_n ebenfalls stetig.

 \qed

 Als unmittelbare Konsequenz des Majoranten–Kriteriums ergibt sich weiterhin

2.3.17 Proposition:

 Sei X ein metrischer Raum und f\_n: X \rightarrow \K^n eine Folge von Funktionen.

 Angenommen, es ist \sup\_{x \in X} |f\_n(x)| \leq M\_n für alle n \in \N. Desweiteren sei die Reihe \sum\_{n=1}^\infty M\_n konvergent. Dann ist \sum\_{n =1}^\infty f\_n gleichmäßig konvergent und für jedes x \in X ist die Reihe \sum\_{n =1}^\infty f\_n(x) absolut konvergent.

 \qed

Wir betrachten als nächstes zwei zentrale Beispiele für Funktionenreihen.

 2.3.18 Beispiel: [Weierstrass–Funktionen]

 Es sei f\_1:\R \rightarrow \R auf [-1/2,1/2] definiert durch f\_1(x) =|x| und dann mittels periodischer Fortsetzung gemäß f\_1(k+x)=f(x) für k \in \Z. Für n \in \N definiert man dann

 f\_n(x):=\frac{f\_1(4^{n-1}x)}/{4^{n-1}}#, f(x):=\sum\_{n=1}^\infty f\_n(x).

 Da |f\_n(x)| \leq 2^{-(2n-1}), ist die Reihe nach obiger Proposition gleichmäßig konvergent. Nach obigem Korollar ist somit f eine stetige Funktion. Jedoch weist f ein fraktales Verhalten auf und wir werden später sehen, dass f nirgends differenzierbar ist. Dies hängt damit zusammen, dass f in jeder noch so kleinen Umgebung eines Punktes x\_0 \in \R weder monoton fallend noch monoton wachsend ist.

2.3.19 Beispiel: [Die Riemannsche \zeta-Funktion]

Wir betrachten die Funktionenreihe

 \zeta(z):=\sum\_{n=1}^\infty \frac{1}/{n^z}#.

 Wir zeigen im Folgenden, dass \zeta(z) auf X=\mklm{z \in \C: \Re (z)>1} fast gleichmäßig konvergent ist. Sei so K \subset X eine kompakte Teilmenge. Dann existiert ein \epsilon\_K >0 derart, dass 1+\epsilon\_K \leq \Re(z) für alle z \in K. Damit ist

 |n^z|=|e^{z \ln n}| =e^{\Re(z) \ln n} | e^{i\Im (z) \ln n}| =n^{\Re(z)} \geq n^{1+\epsilon\_K} \forall z \in K,

 also \frac{1}/{|n^z|}# \leq \frac{1}/{n^{1+\epsilon\_K}}# für alle z \in K. Nach Beispiel 1.5.18 ist die Reihe \sum\_n n^{-(1+\epsilon\_K)} konvergent, so dass nach Proposition 2.3.17 die \zeta–Funktion auf K gleichmäßig konvergiert und somit fast gleichmäßig konvergent auf X ist. Nach obigem Korollar stellt sie dort eine stetige Funktion dar. Es lässt sich sogar zeigen, dass \zeta(z) für alle z \not=1 mittels analytischer Fortsetzung sinnvoll definiert werden kann. Ein unendliches Produkt \prod\_{n=1}^\infty z\_n komplexer Zahlen z\_n \in \C heiße nun {konvergent}, falls die Folge der Partialprodukte p\_m =\prod\_{n=1}^m z\_n konvergiert. Es gilt dann folgende, von Bernhard Riemann 1859 bewiesene Beziehung:

 \zeta(z):=\sum\_{n=1}^\infty \frac{1}/{n^z}#

= \prod\_{p {Primzahl}} \frac{1}/{1-p^{-z}}#, 1\not=z \in \C.

Sie ergibt sich unmittelbar aus der Summationsformel für die geometrische Reihe und der Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung.

Damit nimmt die \zeta-Funktion eine wichtige Rolle in der analytischen Untersuchung der Primzahlen ein.

Es ist nun nicht schwer einzusehen, dass \zeta(z) bei z=-2,-4,-6, \dots (triviale) Nullstellen hat. Eines der großen, noch ungelösten Probleme der Mathematik ist die Riemannsche Vermutung.

Alle nicht-trivialen Nullstellen von \zeta(z) liegen auf der Geraden \Re(z)=1/2.

Diese Vermutung hängt mit der Verteilung der Primzahlen zusammen und ihre Auflösung hätte weitreichende Konsequenzen für die Mathematik.

## 2.4 Potenzreihen, trigonometrische Funktionen und die Zahl \pi

###  Potenzreihen

Wir kommen nun zu einer wichtigen Spezialfamilie von Funktionenreihen.

2.4.1 Definition:

Eine Potenzreihe mit Zentrum z\_0 \in \C ist eine Funktionenreihe der Form

p(z):= \sum\_{n=0}^\infty a\_n (z-z\_0)^n, a\_n \in \C.

Für z=z\_0 ist die Reihe p(z) trivialerweise konvergent und es gilt p(z\_0)=0.

2.4.2 Satz:

Wir betrachten eine Potenzreihe p(z):= \sum\_{n=0}^\infty a\_n (z-z\_0)^n.

Aufzählungsanfang

1. Ist p(z) in z\_1\not =z\_0 konvergent, so ist p(z) in jedem Punkt z \in K(z\_0, |z\_1-z\_0|) absolut konvergent, sowie als Funktionenreihe auf K(z\_0,|z\_1-z\_0|) fast gleichmäßig konvergent.
2. Ist p(z) in z\_1\not =z\_0 divergent, so ist p(z) in jedem Punkt z mit |z-z\_0| > |z\_1 - z\_0| divergent.

 Aufzählungsende

Beweis:

Angenommen, p(z\_1) ist konvergent. Dann stellt a\_n(z\_1-z\_0)^n eine Nullfolge dar, so dass ein M>0 existiert mit |a\_n(z\_1-z\_0)^n| \leq M für alle n \in \N. Nun berechnet man für beliebiges z \in \C

|a\_n(z-z\_0)^n|=|a\_n(z\_1-z\_0)^n| |\frac {z-z\_0}/{z\_1-z\_0}# |^n \leq M |\frac {z-z\_0}/{z\_1-z\_0}# |^n.

Da jedoch |{(z-z\_0)}/{(z\_1-z\_0)}|<1 für z \in K(z\_0, |z\_1-z\_0|) gilt, kann für solche z die Reihe \sum\_{n=0}^\infty a\_n (z-z\_0)^n durch die geometrische Reihe majorisiert werden und wir erhalten deren absolute Konvergenz. Sei nun K \subset K(z\_0,|z\_1-z\_0|) eine kompakte Teilmenge. Offenbar ist

\eta(K):= \sup \mklm{|z-z\_0|: z \in K}< |z\_1-z\_0|,

also \eta(K)/|z\_1-z\_0|<1. Infolge von

|a\_n(z-z\_0)^n|\leq M \frac {\eta(K)^n}/{|z\_1-z\_0|^n}# \forall z \in K

ergibt sich dann mit Proposition 2.3.17 die gleichmäßige Konvergenz von p(z) in K. Da K beliebig war, ist p(z) somit auf K(z\_0,|z\_1-z\_0|) fast gleichmäßig konvergent und wir erhalten (1).

 Wir nehmen schließlich an, dass p(z\_1) divergent ist. Wäre nun p(z) für |z-z\_0| > |z\_1-z\_0| konvergent, so würde (1) implizieren, dass p(z\_1) konvergent ist, Widerspruch. Damit folgt (2).

Als unmittelbare Konsequenz erhalten wir folgendes

2.4.3 Korollar:

Sei p(z) := \sum\_{n=0}^\infty a\_n (z-z\_0)^n eine Potenzreihe und

R := \sup \mklm{|z-z\_0|: z \in \C, p(z) ist konvergent}.

Dann ist p(z) für z \in K(z\_0,R) absolut konvergent und in K(z\_0,R) fast gleichmäßig konvergent, sowie außerhalb von \overline{K(z\_0,R)} divergent. Über das Konvergenzverhalten auf dem Rand lässt sich im Allgemeinen nichts sagen.

\qed

2.4.4 Definition:

Sei p(z):= \sum\_{n=0}^\infty a\_n (z-z\_0)^n eine Potenzreihe. Dann heißt

R ihr {Konvergenzradius} und K(z\_0,R) ihr {Konvergenzkreis}.

2.4.5 Beispiel:

Wir hatten in Beispiel 1.5.10 bereits gesehen, dass die Potenzreihe p(z)=\sum\_n z^n/n für z=1 divergiert und für |z|=1, z\not=1, konvergiert. Demnach muss ihr Konvergenzradius R=1 betragen und p(z) auf K(0,1) stetig sein.

2.4.6 Beispiel:

Es ist 1+z+\dots + z^n=n+1 für z=1, so dass der Konvergenzradius der geometrischen Reihe gleich R=1 sein muss. In diesem Fall liegt an keinem Randpunkt des Konvergenzkreises Konvergenz vor.

Aus dem Wurzelkriterium ergibt sich weiter folgende Formel für den Konvergenzradius einer Potenzreihe.

2.4.7 Korollar:

Sei p(z):= \sum\_{n=0}^\infty a\_n (z-z\_0)^n eine Potenzreihe. Dann gilt für ihren Konvergenzradius

R=\frac{1}/{\lambda}# , \lambda =\limsup \sqrt[n]{|a\_n|}.

Gilt insbesondere \lambda =\infty, so ist R=0.

\qed

### Trigonometrische Funktionen

Wir besprechen im Folgenden die trigonometrischen Funktionen, welche spezielle Potenzreihen darstellen.

2.4.8 Definition:

Für z \in \C definiert man die {Cosinus– bzw. Sinus–Funktion} gemäß

 \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}/{2}# , \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}/{2i}#.

Aus der Reihendarstellung für die Exponentialfunktion ergeben sich unmittelbar die Potenzreihen-Darstellungen

\sin z = z - \frac {z^3}/{3!}# + \frac{z^5}/{5!}# -\cdots, \cos z =1 - \frac {z^2}/{2!}# + \frac{z^4}/{4!}#- \cdots.

Diese Potenzreihen sind auf \C absolut sowie fast gleichmäßig konvergent.

2.4.9 Satz: [Eigenschaften trigonometrischer Funktionen]

Aufzählungsanfang

(1) Die Sinus– und Cosinus–Funktion sind stetige, komplexwertige Funktionen auf \C und für z \in \R gilt \sin z, \cos z \in \R.

(2) Für alle z \in \C gilt \sin^2z + \cos^2 z=1.

(3) Für alle z \in \C gilt e^{iz}=\cos z+ i\sin z.

(4) Für alle z\_1,z\_2 \in \C gilt \sin(z\_1+z\_2) = \sin z\_1 \cos z\_2 + \sin z\_2 \cos z\_1.

(5) Für alle z\_1,z\_2 \in \C gilt \cos(z\_1 + z\_2) = \cos z\_1 \cos z\_2 - \sin z\_1 \sin z\_2.

(6) Für alle z \in \C gilt \sin(-z) = - \sin z, \cos(-z)=\cos z.

(7) Für x \in \R ist |\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1.

Aufzählungsende

Beweis:

(1) ergibt sich unmittelbar aus den Potenzreihendarstellungen der Cosinus– und Sinus–Funktion. Desweiteren ergibt eine Rechnung

\sin^2z + \cos^2 z=\frac{-1}/{4}# ( e^{2iz} -2 +e^{-2iz}) + \frac{1}/{4} (e^{2iz} +2+ e^{-2iz})=1

und wir erhalten (2). Ebenso unmittelbar sieht man (3) ein. Hieraus ergeben sich dann (4) und (5) durch Ausschreiben der Gleichheit e^{i(z\_1+z\_2)}= e^{iz\_1} e^{iz\_2} in Imaginär– und Realteil. (6) und (7) folgen unmittelbar aus den Definitionen.

2.4.10 Lemma: [Definition der Zahl \pi]

Die Menge \mklm{t \in [0,2]: \cos t=0} ist nicht leer und abgeschlossen und man definiert

\pi:= 2 \min \mklm{t \in [0,2]: \cos t=0}.

Beweis:

Es ist \cos 0 =1. Weiterhin ergibt sich aus dem Beweis des Abel–Dirichlet–Kriteriums, dass

\cos 2=1 - \frac {2^2}/{2!}# + \frac {2^4}/{4!}# +r, |r| \leq \frac {2^6}/{6!}# <0,1,

so dass \cos 2<0. Tatsächlich folgt aus \eqref{RG} allgemein für eine Leibniz–Reihe \sum\_{k=0}^ \infty(-1)^k a\_k, dass

 |\sum\_{k=0}^ \infty(-1)^k a\_k-\sum\_{k=0}^ n(-1)^k a\_k | \leq |a\_{n+1}|.

Da \cos x:[0,2] \rightarrow \R eine stetige Funktion ist, folgt nach dem Zwischenwertsatz von Darboux die Existenz eines t \in [0,2] mit \cos t=0 und wir erhalten die Behauptung.

2.4.11 Korollar:

Die Exponentialfunktion ist periodisch mit der Periode 2\pi i,

 e^{z+2\pi i} = e^z, z \in \C.

Die Funktionen \sin z und \cos z sind periodisch mit der Periode 2\pi,

\cos (z+2\pi) = \cos z, \sin(z+2\pi) = \sin z, z \in \C.

Beweis:

Wegen \sin^2z + \cos^2z =1 muss \sin(\pi/2)=\pm 1 sein. Nun aber berechnet man für t \in [0,2]

\sin t = t - \frac {t^3}/{3!}# + \frac{t^5}/{5!}# - \dots

= t( 1 -\frac{t^2}/{3!}# ) + \frac {t^5}/{5!}# ( 1 - \frac{t^2}/{6 \cdot 7}# ) + \dots,

so dass offenbar \sin t \geq 0 für t \in [0,2] und demzufolge \sin(\pi/2)=1 gelten muss. Damit aber schließt man

e^{i\pi/2} =\cos \frac{\pi}/{2}# + i \sin \frac{\pi}/{2}# =i, e^{2\pi i} =1.

Zum Abschluss bemerken wir noch folgende

2.4.12 Proposition:

Es gilt e^{it}\not=1 für 0<t < 2\pi.

Zu jedem z mit |z|=1 existiert genau ein t \in [0,2\pi[ mit z=e^{it}.

\qed

# Kapitel 3: Differentialrechnung in einer Variablen

'Yet nature is made better by no mean,

But nature makes that mean: so, over that art

Which you say adds to nature, is an art

That nature makes.

William Shakespeare, A Winter's Tale. IV.3.

## 3.1 Die Ableitung einer Funktion

Es bezeichne wie immer \K entweder \R oder \C.

3.1.1 Definition:

Wir betrachten eine offene Menge U \subset \K. Desweiteren sei entsprechend X=\R^d oder \C^d. Eine Abbildung f:U \rightarrow X heißt {in x\_0 \in U \K-differenzierbar}, falls der Grenzwert

\label{eq:15}

\lim\_{x \to x\_0} \frac{f(x)-f(x\_0)}/{x-x\_0}#

in \K^d existiert. Er wird dann als {Differentialquotient oder Ableitung von f an der Stelle x\_0} bezeichnet und mit f'(x\_0) bezeichnet. Ist f:U \rightarrow X in jedem Punkt x \in U \K-differenzierbar, so heißt f {\K-differenzierbar}. Die so entstehende Funktion f':U \rightarrow X wird { Ableitung von f} genannt. Ist wiederum f' \K-differenzierbar in x\_0, so sagt man, dass f {in x\_0 zweimal-differenzierbar} ist und schreibt (f')'(x\_0)=f''(x\_0)=f^{(2)}(x\_0). Entsprechend definiert man die {k-te Ableitung von f an einem Punkt x\_0} durch f^{(k)}(x\_0)=(f^{(k-1)})'(x\_0), falls f^{(k-1)}(x) überall auf U existiert. Statt \C-differenzierbar sagt man auch {holomorph}.

3.1.2 Bemerkung:

Beachte, dass gemäß Definition 2.1.3 in \eqref{eq:15} nur solche Folgen \mklm{x\_n} in U mit x\_n \to x\_0 betrachtet werden, für welche x\_n \not=x\_0 gilt.

Sei f:U \rightarrow X im Punkt x\_0 \K-differenzierbar. Die Gerade h\_{x\_0}(x) = f'(x\_0)(x-x\_0) + f(x\_0) heißt {Tangente} der Kurve f(x) in x\_0 und approximiert sie in erster Ordnung.

3.1.3 Beispiel:

Die Funktion f:\C\rightarrow \C, f(z)=\bar z ist an keiner Stelle \C-differenzierbar. Sei so etwa z\_0 \in \C. Wir zeigen, dass dann der entsprechende Differentialquotient nicht existiert. Denn seien jeweils y\_n=z\_0+i/n und z\_n=z\_0 +1/n Folgen, die gegen z\_0 konvergieren. Dann gilt

 \frac{f(y\_n)-f(z\_0)}/{y\_n-z\_0}#=\frac{\bar z\_0 -i/n-\bar z\_0}/{z\_0 + i/n -z\_0}# =-1,

 \frac{f(z\_n)-f(z\_0)}/{z\_n-z\_0}#=\frac{\bar z\_0 +1/n-\bar z\_0}/{z\_0 + 1/n -z\_0}# =1.

Wie das folgende Lemma zeigt, impliziert Differenzierbarkeit offensichtlich Stetigkeit.

3.1.4 Lemma:

Sei U \subset \K offen und f:U \rightarrow \K^d eine in x\_0 \in U \K–differenzierbare Funktion. Dann ist f auch in x\_0 stetig.

Beweis:

Wir betrachten eine Folge \mklm{x\_n} in U mit x\_n \to x\_0 und x\_n \not=x\_0. Infolge von

|f(x\_n) -f(x\_0)| = |x\_n -x\_0| | \frac{f(x\_n)-f(x\_0)}/{x\_n-x\_0}#|

gilt dann f(x\_n) \to f(x\_0).

3.1.5 Satz: [Additions- und Produktregel]

Sei U \subset \K offen und f,g :U \rightarrow \K^d in x\_0\in U \K-differenzierbare Funktionen. Dann gilt

Aufzählungsanfang

(1) Die Funktion f+g ist \K-differenzierbar an der Stelle x\_0 und (f+g)'(x\_0) =f'(x\_0)+ g'(x\_0).

(2) Sei d=1. Dann ist f \cdot g in x\_0 \K-differenzierbar und (f\cdot g)'(x\_0) =f'(x\_0) g(x\_0)+f(x\_0)g'(x\_0).

Aufzählungsende

Beweis:

Die Behauptungen ergeben sich unmittelbar durch Betrachtung der Differenzenquotienten

\frac{f(x) + g(x) - (f(x\_0)+ g(x\_0))}/{x-x\_0}#= \frac{f(x)-f(x\_0)}/{x-x\_0}#+ \frac{g(x)-g(x\_0)}/{x-x\_0}#,

sowie

\frac{f(x) g(x) - f(x\_0)g(x\_0)}/{x - x\_0}#=f(x) \frac{g(x)-g(x\_0)}/{x-x\_0}#+ g(x\_0) \frac{f(x)-f(x\_0)}/{x-x\_0}#,

unter Berücksichtigung der Tatsache, dass f bei x\_0 stetig ist und somit f(x) \to f(x\_0) gilt.

3.1.6 Beispiel:

Wir betrachten die identische Abbildung f:\C\rightarrow \C, z \mapsto z. Dann ist f'(z)=1 und nach vorigem Satz folgert man (z^n)'=nz^{n-1} für jedes n \in \N. Damit ist jedes komplexe Polynom p(z)= \sum\_{k=0}^n a\_k z^k holomorph.

3.1.7 Lemma:

Sei U \subset \K offen und f:U \rightarrow \K eine in x\_0 \in U \K–differenzierbare Funktion mit f(x\_0)\not =0. Dann ist 1/f in einer Umgebung x\_0 \in V\subset U definiert, \K-differenzierbar in x\_0 und es gilt

 ( \frac{1}/{f}# )' (x\_0) = - \frac {f'(x\_0)}/{f^2(x\_0)}# .

Beweis:

Da f in x\_0 stetig ist und f(x\_0)\not=0, ist 1/f in einer hinreichend kleinen Umgebung von x\_0 definiert. Die Behauptung folgt dann mit

 \frac{(1/f)(x)-(1/f)(x\_0)}/{x-x\_0}#= \frac{f(x\_0)-f(x)}/{x-x\_0}# \frac{1}/{ f(x) f(x\_0)}# \to- f'(x\_0) \frac{1}/{f^2(x\_0)}#.

3.1.8 Satz: [Kettenregel]

Seien U\_1,U\_2 \subset \K offene Teilmengen, g:U\_1\rightarrow U\_2 und f:U\_2 \rightarrow \K^d Abbildungen, sowie g in x\_0 und f in g(x\_0) \in U\_2 \K-differenzierbar. Dann ist auch f \circ g in x\_0 \K-differenzierbar und es gilt

(f \circ g)'(x\_0) = g'(x\_0) \circ f '( g(x\_0)).

Beweis:

Unter der Annahme g(x)\not= g(x\_0) gilt

\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g) (x\_0)}/{x-x\_0}# = \frac{g(x) - g(x\_0)}/{x - x\_0}# \cdot \frac { f(g(x)) - f(g( x\_0))}/{g(x) - g (x\_0)}# .

Wir betrachten nun eine beliebige Folge \mklm{x\_n} in U\_1 mit x\_n \to x\_0 und x\_n \not=x\_0. Gilt ab einer gewissen Stelle g(x\_n)\not=g(x\_0), so impliziert die Stetigkeit von g in x\_0, dass g(x\_n) \to g(x\_0). Damit ist

\frac{g(x\_n) - g(x\_0)}/{x\_n - x\_0}# \cdot \frac { f(g(x\_n)) - f(g( x\_0))}/{g(x\_n) - g (x\_0)}# \to g'(x\_0) \cdot f'(g(x\_0))

infolge der Existenz und Eindeutigkeit der Ableitungen g'(x\_0) und f'(g(x\_0)). Gilt hingegen g(x\_n) =g(x\_0) für unendlich viele Indizes n, so ist

g'(x\_0)= \lim\_{n \to \infty} \frac{g(x\_n)-g(x\_0)}/{x\_n -x\_0}#=0

sowie auch

\lim\_{n \to \infty} \frac{f(g(x\_n))-f(g(x\_0))}/{x\_n -x\_0}#=0

und wir erhalten insgesamt die Behauptung.

3.1.9 Satz: [Satz über die Ableitung der Umkehrabbildung]

\label{satz:3.1.3}

Seien U\_1, U\_2 \subset \K offene Teilmengen und f:U\_1 \rightarrow U\_2 ein Homöomorphismus. Ist f an der Stelle x\_0 \in U\_1 \K-differenzierbar und f'(x\_0)\not=0, so ist die Umkehrabbildung f^{-1}:U\_2 \rightarrow U\_1 an der Stelle f(x\_0) ebenfalls \K-differenzierbar und

(f^{-1})'(f(x\_0))= \frac{1}/{f'(x\_0)}#.

Beweis:

Man berechnet mit den Bezeichnungen f(x)=y und f(x\_0)=y\_0

\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y\_0)}/{y - y\_0}#=\frac{x-x\_0}/{f(x)-f(x\_0)}# = ( \frac{f(x) - f( x\_0)}/{x-x\_0}# ) ^{-1}.

Ist nun y\_n=f(x\_n) eine Folge mit y\_n \to y\_0 und y\_n \not=y\_0, so impliziert die Stetigkeit von f^{-1}, dass x\_n \to x\_0. Damit folgt die Behauptung.

3.1.10 Bemerkung:

Die Bedingung f'(x\_0)\not=0 im obigen Satz ist notwendig. Betrachte etwa U\_1=U\_2=\R und f(x)=x^3. Offenbar ist f ein Homöomorphismus mit Umkehrabbildung f^{-1}:\R \rightarrow \R: y\mapsto \sqrt[3]{y}. Dann ist f'(0)=0, jedoch für t \to 0

\frac{f^{-1}(t) - f^{-1}(0)}/{t}#= \frac{\sqrt[3]{t}}/{t}# \to \infty ,

und somit f^{-1} an der Stelle Null nicht differenzierbar.

3.1.11 Satz:

Sei p(z)=\sum\_{n=0}^\infty a\_n (z-z\_0)^n eine Potenzreihe um z\_0 \in \C mit Potenzradius R. Dann definiert p(z) eine in jedem Punkt z \in K(z\_0,R) holomorphe Funktion und es gilt

\label{eq:16}

p'(z)= \sum\_{n=1}^\infty a\_n n (z-z\_0)^{n-1}.

Beweis:

Nach den Korollaren 2.3.16 und 2.4.3 ist p(z) auf K(z\_0, R) eine stetige Funktion. Weiter gilt mit Korollar 2.4.7 infolge von

 \limsup \sqrt[n]{n |a\_n|}= \limsup \sqrt[n]{n} \cdot \limsup \sqrt[n]{|a\_n|}=1 \cdot R^{-1},

dass die Reihe auf der rechten Seite von \eqref{eq:16} denselben Konvergenzradius R wie p(z) hat. Sei nun R>\rho >0, sowie z,\tilde z \in K(z\_0,\rho) und definiere

q\_z(\tilde z):= \frac{p(\tilde z) -p(z)}/{\tilde z -z}#

= \sum\_{n=1}^\infty a\_n ( \frac{(\tilde z - z\_0)^n - (z-z\_0)^n}/{\tilde z -z}#),

wobei sich die letzte Gleichung aus der absoluten Konvergenz von p(z) für z

\in K(z\_0,R) und den Rechenregeln für Grenzwerte ergibt.

Aufgrund von

\frac{a^n-b^n}/{a-b}#= a^{n-1} +a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}

ist q\_z(\tilde z) insbesondere auch für z=\tilde z definiert und es gilt

| \frac{(\tilde z - z\_0)^n - (z-z\_0)^n}/{\tilde z -z}#| < n\rho^{n-1}.

Da jedoch \limsup \sqrt[n]{|a\_n n \rho^n|} = \rho/R<1, ist nach dem Wurzelkriterium

 \sum\_{n=1}^\infty a\_n n \rho^{n-1} konvergent. Mit Proposition 2.3.17 folgt hieraus, dass q\_z(\tilde z) auf K(z\_0,\rho) gleichmäßig konvergent und damit stetig ist. Somit existiert \lim\_{\tilde z \to z} q\_z(\tilde z) und ist gleich q\_z(z). Also ist p(z) an jedem Punkt z \in K(z\_0,R) \C-differenzierbar und

p'(z)=q\_z(z)= \sum\_{n=1}^\infty a\_n n (z-z\_0)^{n-1}.

3.1.12 Beispiel:

Die Exponentialfunktion ist überall differenzierbar und es gilt (e^z)'=e^z für alle z \in \C, da nach obigem Satz

\frac {d e^z}/{dz}# = \sum\_{n=0}^\infty \frac{1}/{n!} # n z^{n-1}=\sum\_{n=1}^\infty \frac{1}/{(n-1)!}# ^{n-1} = \sum\_{k=0}^\infty \frac{1}/{k!}# z^k.

Ebenso sind die trigonometrischen Funktionen überall differenzierbar und man berechnet (\sin z)'=\cos z, (\cos z)'=-\sin z.

3.1.13 Beispiel:

Die Logarithmusfunktion \ln: \R^+ \rightarrow \R ist überall differenzierbar und es ist ( \ln x)'=1/x. Tatsächlich folgt aus dem Satz über die Ableitung der Umkehrabbildung, dass mit y=e^x

(\ln )'(y)=(\ln )'(e^x)=\frac{1}/{(e^x)'}# =\frac{1}/{e^x}# = \frac{1}/{y}# .

3.1.14 Definition:

Sei U \subset \K eine offene Teilmenge. Eine Funktion f:U \rightarrow \K heißt {\K-analytisch}, falls für jedes z\_0 \in U eine Potenzreihe p(z)=\sum\_{n=0}^\infty a\_n(z\_0) (z-z\_0)^n mit positivem Konvergenzradius R\_{z\_0} existiert derart, dass f(z)=p(z) auf U \cap K(z\_0,R\_{z\_0}). Eine Abbildung f:U \rightarrow \K^d heißt \K-analytisch, falls jede ihrer Komponentenfunktionen \K-analytisch ist.

3.1.15 Satz:

Sei f:U \rightarrow \K^d eine analytische Funktion. Dann existieren in jedem Punkt z\_0 \in U alle Ableitungen f^{(k)}(z\_0). Insbesondere kann man Potenzreihen beliebig oft differenzieren.

Beweis:

Sei z\_0 \in U gegeben und gelte auf U\cap K(z\_0,R\_{z\_0})

die Potenzreihenentwicklung

f(z)= \sum\_{n=0}^\infty a\_n(z\_0) (z-z\_0)^n.

Nach dem vorigen Satz ist f auf U\cap K(z\_0,R\_{z\_0}) differenzierbar und

f'(z)= \sum\_{n=1}^\infty a\_n(z\_0) n (z-z\_0)^{n-1}.

Die so entstehende Potenzreihe besitzt denselben Konvergenzradius, so dass eine iterative Anwendung des vorigen Satzes die Behauptung ergibt.

3.1.16 Definition:

Sei U \subset \K eine offene Teilmenge. Dann führen wir folgende Bezeichnungen ein:

C^k(U;\K^d):= \mklm{f:U \rightarrow \K^d: alle Ableitungen f, f',\dots, f^{(k) existieren und sind stetig }};

C^\infty(U;\K^d):= \mklm{f:U \rightarrow \K^d: alle Ableitungen f, f',f'', \dots existieren (und sind stetig) };

C^\omega(U;\K^d):= \mklm{f:U \rightarrow \K^d: f ist \K-analytisch }.

Desweiteren wird eine Funktion f \in C^k(U;\K^d) als {k-mal stetig differenzierbar} bezeichnet. Insbesondere ist C^0(U;\K^d)=C(U;\K^d) der Raum der stetigen Funktionen.

3.1.17 Bemerkung:

Der Hauptunterschied zwischen \R-Differenzier\-barkeit und \C-Differenzier\-barkeit besteht darin, dass eine \C-differenzierbare oder holomorphe Funktion bereits analytisch und somit unendlich oft stetig differenzierbar ist. Insbesondere gilt

C^1(U;\C^d)=C^\omega(U;\C^d).

Dieser Sachverhalt wird in der Funktionentheorie bewiesen. Über \R sind die Funktionenklassen C^k jedoch im Allgemeinen verschieden, wie die folgenden Beispiele zeigen.

3.1.18 Beispiel:

Sei f: \R \rightarrow \R gegeben durch f(x) =x^3 \sin \frac{1}/{x}# für x \not=0 und f(0)=0. Die Funktion f ist auf \R stetig differenzierbar mit Ableitung

f'(x) = 3x^2 \sin \frac{1}/{x}# - x \cos \frac{1}/{x}# falls x\not=0, f'(0)=0,

also f \in C^1(\R;\R). Aber f''(0) existiert nicht, da

\lim\_{x \to 0}\frac{3x^2 \sin \frac{1}/{x}# - x \cos \frac{1}/{x}# }#{x}

= 0-\lim\_{x \to 0} \cos \frac{1}/{x}#

nicht existiert, so dass f \not\in C^2(\R;\R).

Entsprechend sieht man, dass g:\R\rightarrow \R, gegeben durch g(x)= x^4 \sin \frac{1}/{x}# für x \not=0 und g(0)=0, zweimal differenzierbar auf \R ist. Jedoch ist f'' unstetig in Null.

## 3.2 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Wir werden uns im weiteren Verlauf der Vorlesung auf reell-differenzierbare Funktionen beschränken.

3.2.1 Definition:

Sei f:[a,b]\rightarrow \R eine reellwertige Funktion auf einem kompakten Intervall [a,b]. Dann hat f in x\_0 \in (a,b) ein {lokales Minimum bzw. Maximum}, falls ein \epsilon>0 existiert derart, dass

f(x) \geq f(x\_0) bzw. f(x) \leq f(x\_0) \forall x \in K(x\_0,\epsilon).

Eine notwendige Bedingung für die Existenz von Extrema liefert folgende

3.2.2 Proposition:

Sei f:[a,b]\rightarrow \R eine differenzierbare Funktion und x\_0 \in (a,b) ein lokales Minimum bzw. Maximum. Dann ist f'(x\_0)=0.

Beweis:

Sei etwa x\_0 ein lokales Maximum. Dann gilt für x \in K(x\_0,\epsilon) mit x>x\_0

\frac{f(x)-f(x\_0)}/{x-x\_0}# \leq 0, also \lim\_{x \to x^+\_0} \frac{f(x)-f(x\_0)}/{x-x\_0}# \leq 0.

Entsprechend ist für x \in K(x\_0,\epsilon) mit x<x\_0

\frac{f(x)-f(x\_0)}/{x-x\_0}# \geq 0, also \lim\_{x \to x^-\_0} \frac{f(x)-f(x\_0)}/{x-x\_0}# \geq 0.

Da jedoch f an der Stelle x\_0 differenzierbar ist, müssen beide Grenzwerte übereinstimmen und gleich f'(x\_0) sein. Damit folgt die Behauptung.

3.2.3 Bemerkung:

Die Umkehrung obigen Sachverhaltes gilt nicht. So ist etwa für f(x)=x^3 offenbar f'(0)=0. Jedoch besitzt f bei Null kein Extremum, sondern einen Wendepunkt.

3.2.4 Satz: [Satz von Rolle]

Sei f: [a,b]\rightarrow \R stetig und auf (a,b) differenzierbar. Ist f(a)=f(b), so existiert ein Punkt x\_0 \in (a,b) mit f'(x\_0)=0.

Beweis: Ist f konstant, so ist die Behauptung klar. Sei also f nicht konstant, so dass ein x\_1 \in (a,b) mit beispielsweise f(x\_1)> f(a)=f( b) existiert. Da f stetig auf [a,b] ist, nimmt f nach dem Satz von Weierstrass auf [a,b] sein Supremum M=\sup \mklm{f(t): t \in [a,b]} an. Es existiert also ein x\_0 \in [a,b] mit f(x\_0)=M. Da jedoch M > f(a)=f(b), ist x\_0 \not=a,b und somit x\_0 \in (a,b) ein lokales Maximum. Nach dem vorigen Satz ist dann f'(x\_0)=0. Entsprechend verfährt man für den Fall, dass f(x\_1) < f(a)=f(b).

Wir kommen nun zu dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung in einer Veränderlichen.

3.2.5 Satz: [Zweiter Mittelwertsatz]

Seien f,g: [a,b]\rightarrow \R stetige und auf (a,b) differenzierbare Funktionen. Dann existiert ein Punkt x\_0 \in (a,b) derart, dass

[f(b) -f(a)] g'(x\_0)= [g(b)-g(a)] f'(x\_0).

Beweis:

Wir definieren h(t):= [f(b) - f( a) ] g(t) - [g(b)-g(a)] f(t). Die Funktion h ist auf [a,b] stetig und auf (a,b) differenzierbar. Desweiteren ist h(a)=h(b)=f(b)g(a)- g(b) f(a). Damit können wir den Satz von Rolle anwenden und erhalten die Existenz eines x\_0 \in (a,b) mit h'(x\_0)=0. Dies aber ist genau die Behauptung.

Hieraus ergibt sich unmittelbar der klassische Mittelwertsatz.

3.2.6 Korollar:[Erster Mittelwertsatz]

Sei f: [a,b]\rightarrow \R stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann existiert ein x\_0 \in (a,b) mit

 \frac{f(b)-f(a)}/{b-a}# = f'(x\_0).

Beweis:

Man betrachte in dem vorigen Satz g(x)=x.

Weitere unmittelbare Konsequenzen des Mittelwertsatzes sind folgende Aussagen.

3.2.7 Korollar:

Sei f : (a,b)\rightarrow\R differenzierbar.

Aufzählungsanfang

1. Gilt f'(x)\geq 0 für alle x \in (a,b), so ist f auf (a,b) monoton wachsend. Gilt sogar f'(x) > 0, so ist f strikt monoton wachsend.
2. Gilt f'(x)\leq 0 für alle x \in (a,b), so ist f auf (a,b) monoton fallend. Gilt sogar f'(x) < 0, so ist f strikt monoton fallend.
3. Gilt f'(x)= 0 für alle x \in (a,b), so ist f auf (a,b) konstant.

Aufzählungsende

Beweis:

Seien x\_1<x\_2 zwei Punkte aus (a,b) und betrachte das Intervall [x\_1,x\_2]. Nach dem ersten Mittelwertsatz existiert ein

Punkt x\_3\in (x\_1,x\_2) mit

\frac{f(x\_2)-f(x\_1)}/{x\_2-x\_1}# = f'(x\_3).

Wegen x\_2-x\_1>0 folgen hiermit die Behauptungen.

3.2.8 Korollar: [Mittelwertungleichung]{Mittelwertungleichung}

Ist f: [a,b]\rightarrow\R stetig und im offenen Intervall (a,b)

differenzierbar, so existiert ein Punkt x\_0\in(a,b) mit

|f(b)-f(a)| \leq (b-a) |f'(x\_0)|.

\qed

3.2.9 Bemerkung:

Der erste Mittelwertsatz gilt nicht für Abbildungen f: [a,b]\rightarrow\R^n (n>1).

Betrachte etwa f: [0,2\pi]\to\R^2, f(t)=(\cos t,\sin t).

Es ist \frac{f(2\pi)- f(0)}/{2\pi -0}# = (0,0) ,

aber f'(t)=(-\sin t,\cos t), also |f'(t)|=1. Damit kann kein Punkt

t\_0\in ]0,2\pi[ mit f'(t\_0)=(0,0) existieren.

Wie wir im Folgenden sehen werden, gilt die Mittelwertungleichung jedoch auch für Abbildungen f: [a,b]\rightarrow\R^n (n>1) und ist demzufolge universeller als der Mittelwertsatz. Zur Vorbereitung beweisen wir zunächst folgendes

3.2.10 Lemma:

Sei f: [a,b]\to\R^n differenzierbar in x\_0\in(a,b) und

\mklm{\alpha\_k} und \mklm{\beta\_k}\in [a,b] gegen x\_0 konvergente Folgen mit

\alpha\_k<x\_0<\beta\_k. Dann gilt:

\lim\_{k\rightarrow\infty} \frac{f(\beta\_k) - f(\alpha\_k)}/{\beta\_k-\alpha\_k}# = f'(x\_0).

Beweis:

Wir betrachten \lambda\_k=\frac{\beta\_k-x\_0}/{\beta\_k-\alpha\_k}#. Offenbar ist 0<\lambda\_k<1 und man berechnet

\frac{f(\beta\_k) - f(\alpha\_k)}/{\beta\_k-\alpha\_k}# - f'(x\_0) =

\lambda\_k \left[ \frac{f(\beta\_k) - f(x\_0)}/{\beta\_k- x\_0}# -f'(x\_0) \right]

+ (1-\lambda\_k) \left[ \frac{f(\alpha\_k) - f(x\_0)}/{\alpha\_k- x\_0}# -f'(x\_0) \right].

Die beiden großen eckigen Klammern konvergieren gegen Null. Da die Vorfaktoren \lambda\_k und (1-\lambda\_k) beschränkt sind, folgt insgesamt die Behauptung.

3.2.11 Satz: [Mittelwertungleichung im \R^n]

Ist f: [a,b]\rightarrow\R^n stetig und auf (a,b) differenzierbar, so

existiert ein x\_0\in (a,b) mit

\|f(b)- f(a)\| \leq (b-a) \| f'(x\_0)\|.

Beweis:

Setze L=(b-a)/3, M=\|f(b)- f(a)\| und betrachte die Funktion

g: [a,a+2L]\rightarrow\R^n, g(s)=f(s+L)-f(s). Dann gilt

g(a) + g(a+L)+g(a+2L) =

 = [f(a+L)-f(a)]+[f(a+2L)-f(a+L)]+[f(a+3L)-f(a+2L)]

 = f(b) - f(a),

also

\tag{\*}

M \leq \|g(a)\| + \|g(a+L)\| + \|g(a+2L)\|.

Hieraus ergibt sich, dass mindestens ein s\_1\in ]a,a+2L[ existiert dergestalt, dass \|g(s\_1)\|\geq M/3. Denn wäre \|g(s\_1)\| <M/3 auf dem offenen

Intervall, so folgt aus der Stetigkeit, dass \|g(a)\|, \|g(a+2L)\| \leq M/3

an den Randpunkten gilt, im Widerspruch zu (\*).

Wir betrachten nun t\_1=s\_1+L. Es ist a<s\_1<t\_1<b, t\_1-s\_1=L und

\|g(s\_1)\|\geq M/3, mithin \|f(t\_1)-f(s\_1)\|\geq M/3.

Wiederholen wir nun die obige Konstruktion angewandt auf

das Intervall [s\_1,t\_1] anstelle von [a,b], so bekommen wir Folgen s\_n, t\_n mit

Aufzählungsanfang

1. t\_n-s\_n=(b-a)/3^n,
2. \|f(t\_n)-f(s\_n)\|\geq M/3^n.

Aufzählungsende

Nach dem Intervallschachtelungsprinzip

existiert genau ein x\_0 mit \cap\_{n=1}^\infty [s\_n,t\_n]=\{x\_0\}.

Insbesondere konvergieren dann s\_n, t\_n gegen x\_0 und s\_n<x\_0<t\_n.

Damit ist Lemma 3.2.10 anwendbar und impliziert

\lim\_{n\rightarrow\infty} \frac{f(t\_n) - f(s\_n)}/{t\_n- s\_n}# = f'(x\_0).

Aber die Bedingungen (1) und (2) implizieren

\frac{\| f(t\_n)- f(s\_n)\|}/{t\_n-s\_n}# \geq \frac{M}/{(t\_n - s\_n) 3^n}# = \frac{M}/{b-a}#,

so dass insgesamt

\| f'(x\_0)\| \geq \frac{M}/{b-a}# = \frac{\| f(b)-f(a)\|}/{b-a}# .

Wir kommen nun zur de l'Hopital'schen Regel.

3.2.12 Satz: [de l'Hopital'sche Regel]

Sei a<b\leq \infty. Gegeben seien zwei differenzierbare Funktionen f,g:[a,b[\rightarrow \R. Desweiteren seien

g und g' auf [a,b[ nicht null und gelte

\lim\_{x\to b\_-} f(x) = \lim\_{x\to b\_-} g(x) =0 (I)

oder

\lim\_{x\to b\_-} f(x) = \lim\_{x\to b\_-} g(x) =\infty (II).

Existiert der Grenzwert

\lim\_{x\to b\_-} \frac{f'(x)}/{g'(x)}# =: c\in

\R\cup\{\pm\infty\}, so ist auch

\lim\_{x\to b\_-} \frac{f(x)}/{g(x)}# = c.

3.2.13 Beweis:

Sei zunächst c endlich und \epsilon>0

vorgegeben. Es gibt dann ein x\_0<b mit

\label{eq:19x}

\left|\frac{f'(t)}/{g'(t)}# - c \right| < \frac{\epsilon}/{2}# für alle t\in]x\_0,b[.

Sind nun x und y zwei beliebige Punkte mit x\_0\leq x<y<b, so existiert nach dem zweiten Mittelwertsatz ein t\in ]x,y[\subset ]x\_0,b[ mit

\frac{f(y)-f(x)}/{g(y)-g(x)}# = \frac{f'(t)}/{g'(t)}#.

Wegen \eqref{eq:19x} gilt daher für solche x und y

\label{eq:20x}

\left|\frac{f(y)-f(x)}/{g(y)-g(x)}# - c \right| < \frac{\epsilon}/{2}#

 (x\_0\leq x<y<b).

Wir führen nun bei festem x den Grenübergang y\to b\_-

durch und erhalten im Fall (I)

\left|\frac{f(x)}/{g(x)}# - c \right| \leq \frac{\epsilon}/{2}# < \epsilon

für alle x\in[x\_0,b[.

Weil \epsilon beliebig war, ist damit die Behauptung im Fall (I) bewiesen. Im Fall (II) schreiben wir \eqref{eq:20x} mit x:=x\_0 in der Form

\left|\frac{f(y)/g(y)-f(x\_0)/g(y)}/{1 - g(x\_0)/g(y)}# - c \right| < \frac{\epsilon}/{2}# (x\_0 <y<b).

Für hinreichend großes y ist 1-g(x\_0)/g(y)>0 und es folgt

\left| \frac{f(y)}/{g(y)}# - \frac{f(x\_0)}/{g(y)}# - c\left(1 - \frac{g(x\_0)}/{g(y)}#\right)\right|

< \frac{\epsilon}/{2}# \left(1 - \frac{g(x\_0)}/{g(y)}#\right).

Nach der Dreiecksungleichung ergibt sich hieraus

\left| \frac{f(y)}/{g(y)}# - c \right| < \frac{\epsilon}/{2}#+

\frac{\epsilon}/{2}#\left|\frac{g(x\_0)}/{g(y)}#\right|+

\left| \frac{f(x\_0)}/{g(y)}#\right| + |c|\cdot \left|\frac{g(x\_0)}/{g(y)}# \right|.

Da rechts alle Summanden außer dem ersten mit y\to b\_- gegen null

streben, gibt es ein y\_0<b mit

\left| \frac{f(y)}/{g(y)}# - c \right| < \epsilon

für alle y\in[y\_0,b[.

Damit ist auch der Fall (II) bewiesen.

## 3.3 Die Taylor-Entwicklung

Die Tangente, deren Steigung die erste Ableitung war, kann als lineare Approximation einer Funktion aufgefaßt werden. Die Taylor-Formel erlaubt die Näherung von Funktionen durch Polynome höherer Ordnung.

3.3.1 Satz: [Taylor-Formel]

Ist f: [a,b]\rightarrow\R n-mal differenzierbar, so existiert ein x\_0\in (a,b) mit

f(b) = f(a)+ \frac{b-a}/{1!}# f'(a)+\frac{(b-a)^2}/{2!}# f''(a) +\ldots

 + \frac{(b-a)^{n-1}}/{(n-1)!}# f^{(n-1)}(a)+ R\_n(x\_0),

wobei das Restglied mehrere Formen haben kann:

Aufzählungsanfang

1. Lagrange-Darstellung des Restgliedes:

 R\_n(x\_0)=\frac{(b-a)^n}/{n!}# f^{(n)}(x\_0)

1. Cauchy-Darstellung des Restgliedes:

R\_n(x\_0)= \frac{(b-a)(b-x\_0)^{n-1}}/{(n-1)!}# f^{(n)}(x\_0).

Aufzählungsende

Dabei sind die Werte für x\_0 in den verschiedenen

Darstellungen des Restgliedes im Allgemeinen verschieden.

3.3.2 Bemerkung:

Für n=1 entspricht die Taylor-Formel mit Lagrange-Darstellung des Restgliedes genau dem ersten Mittelwertsatz.

Beweis:

Wir betrachten

g(x) := f(b)-f(x)- \frac{b-x}/{1!}# f'(x)- \frac{(b-x)^2}/{2!}# f''(x) - \ldots

- \frac{(b-x)^{n-1}}/{(n-1)!}# f^{(n-1)}(x) .

Diese Funktion ist auf [a,b] differenzierbar und es gilt

g'(x) = -f'(x)+\left[f'(x) - \frac{b-x}/{1!}# f''(x)\right]

+ \left[ \frac{b-x}/{1!}# f''(x) - \frac{(b-x)^2}/{2!}# f'''(x)\right]+\ldots

+ \left[ \frac{(b-x)^{n-2}}/{(n-2)!}# f^{(n-1)}(x) - \frac{(b-x)^{n-1}}/{(n-1)!}# f^{(n)}(x)\right]

= - \frac{(b-x)^{n-1}}/{(n-1)!}# f^{(n)}(x) .

Weiterhin ist g(b)=0. Für die Cauchy-Darstellung des Restgliedes impliziert der

erste Mittelwertsatz, dass eine Zahl x\_0\in (a,b) existiert mit

 \frac{g(b) -g(a)}/{b-a}# = g'(x\_0), also

-g(a) = -(b-a) \frac{(b-x\_0)^{n-1}}/{(n-1)!}# f^{(n)}(x\_0).

Für die Lagrange-Darstellung des Restgliedes greifen wir auf den

zweiten Mittelwertsatz mit der zweiten Funktion h(x)=(b-x)^n zurück. Er

liefert ein x\_0\in (a,b) mit

 \frac{g(b)-g(a)}/{h(b)-h(a)}# = \frac{g'(x\_0)}/{h'(x\_0)}# ,

also

\frac{-g(a)}/{ 0-(b-a)^n}# = \frac{- \frac{(b-x\_0)^{n-1}}/{(n-1)!}# f^{(n)} (x\_0)}/{-n(b-x\_0)^{n-1}}#.

Nach Umformung ergibt sich die angegebene Form des Restglieds.

3.3.3 Definition:

Ist f: (a,b)\rightarrow\R eine C^\infty-Funktion, x\_0\in (a,b), so heißt die Potenzreihe

T(f,x\_0)(x) := \sum\_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(x\_0) }/{k!}# (x-x\_0)^k

die Taylor-Reihe der Funktion f im Punkt x\_0.

Bricht man die Reihe nach dem Term zur Potenz n ab, so redet man vom Taylor-Polynom vom Grad n und bezeichnet es mit T\_n(f,x\_0)(x). Die Taylor-Formel lautet dann einfach

f(b)=T\_{n-1}(f,a)(b)+R\_n(x\_0).

3.3.4 Bemerkung:

Die Taylor-Reihe kann durchaus den Konvergenz-Radius 0 haben, d.h. in keinem von x\_0 verschiedenen Punkt konvergieren.

Auch wenn die Taylor-Reihe den Konvergenz-Radius \infty hat, braucht sie nicht die ursprüngliche Funktion f darzustellen. Als Beispiel betrachten wir

f(x) = \left\{\ba{ll} e^{-1/x^2} & x>0\ 0 & x\leq 0\ea\right.

Diese Funktion ist unendlich oft differenzierbar. Tatsächlich ist f'(x)=-2x^{-3}e^{-1/x^2} für x>0. Der linksseitige Grenzwert des Differentialquotienten in x\_0=0 ist natürlich Null, wir müssen also noch zeigen, dass auch der rechtsseitige Grenzwert dort verschwindet. Dies folgt, sobald man weiß, dass \lim\_{y\rightarrow\infty} y^ne^{-y}=0

für alle n \in \N gilt; aber aus derExponentialreihe folgt für y>0 die Abschätzung

e^y > \frac{y^{n+1}}/{(n+1)!}# , also y^ne^{-y} < \frac{(n+1)!}/{y}# ,

woraus die Behauptung folgt. Insgesamt ist f einmal stetig differenzierbar und f'(0)=0. Mittels Iteration folgt, dass f unendlich oft differenzierbar ist und f^{(m)}(0)=0 für alle m \in \N gilt. Damit ist insgesamt T(f,0)(x)=0.

Es stellt sich demnach die Frage, unter welchen Bedingungen die Taylorreihe einen

positiven Konvergenzradius hat und – zumindest in einem Teil ihres

Konvergenzgebiets – wirklich die ursprüngliche Funktion darstellt.

3.3.5 Satz:

Sei f \in C^\infty((a,b); \R), sowie \epsilonilon>0 und x\_0 \in (a,b) derart, dass (x\_0-\epsilon, x\_0+\epsilon) \subset (a,b).

Gilt für jedes x \in (x\_0-\epsilon,x\_0+\epsilon)

\lim\_{n\rightarrow\infty}

\sup \{ \frac{|x-y|^{n-1}}/{(n-1)!}# |f^{(n)} (y)| : |x\_0-y|\leq |x\_0-x| \} = 0,

so ist T(f,x\_0) in jedem Punkte x \in (x\_0-\epsilon,x\_0+\epsilon) konvergent und T(f,x\_0)(x)=f(x).

Beweis:

Sei o.B.d.A x\_0<x. Wenden wir die Taylor-Formel mit Cauchy-Darstellung des Restgliedes über dem Intervall [x\_0,x] an, so ergibt sich die Existenz eines \xi \in (x\_0,x) mit

|f(x) - T\_{n-1}(f,x\_0)(x)| = |R\_n(\xi)| =

\big| \frac{(x-x\_0)(x-\xi)^{n-1}}/{(n-1)!}# f^{(n)}(\xi)\big|

\leq \frac{|x-x\_0|}/{(n-1)!}# \sup \{|x-y|^{n-1} |f^{(n)} (y)| : |x\_0-y|\leq |x\_0-x| \}.

Nach Voraussetzung konvergiert dann diese Abschätzung gegen Null

für n\rightarrow\infty. Also gilt punktweise

\lim\_{n\rightarrow\infty}T\_{n-1}(f,x\_0)(x) = f(x) . \qed

3.3.6 Beispiel: [Logarithmus-Reihe]

Wir wählen (a,b)=(-1,\infty), f(x)=\ln(1+x), sowie x\_0=0, \epsilon=1.

Dann ist f^{(n)}(x)= \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}/{(1+x)^n}# . Für |x|<1 folgt mit |y|<|x|:

 \frac{ |x-y|^{n-1} }/{(n-1)!}# |f^{(n)}(y)| =

 \frac{|x-y|^{n-1}}/{|1+y|^n}# = \frac{1}/{|1+y|}# \bigg|

 \frac{x-y}/{1+y}# \bigg|^{n-1} \leq \frac{|x|^{n-1}}/{|1+y|}# .

Um die letzte Abschätzung einzusehen, sind einige Fallunterscheidungen nötig.

Im Fall 0\leq x<1, 0\leq x ist x-y\leq x(1+y) trivial, für -1<x\leq 0 und x\leq y\leq 0

berechnet man

|x-y| = |x|-|y| \leq x-|x|\cdot |y| \leq |x|+|x|y = |x|(1+y).

Als stetige Funktion auf einem Kompaktum lässt sich 1/|1+y| durch eine

Konstante abschätzen, so dass dieser Term für n\rightarrow\infty in der Tat

wie |x|^{n-1} gegen Null geht. Damit gilt insgesamt nach obigem Satz für |x| <1

\ln (1+x) = \sum\_{k=1}^\infty \frac{1}/{k!}# (k-1)!(-1)^{k-1}x^k

= \sum\_{k=1}^\infty (-1)^{k-1} \frac{x^k}/{k}#

= x- \frac{x^2}/{2}# + \frac{x^3}/{3}# \pm\ldots

Die Logarithmus-Reihe hat den Konvergenzradius 1.

Weil der Logarithmus stetig ist, gilt die Leibniz'sche Fehlerabschätzung

auch im Limes x\to1, so dass auch

\ln 2 = \sum\_{k=1}^\infty (-1)^{k-1} \frac{1}/{k}#

= 1- \frac{1}/{2}# + \frac{1}/{3}# \pm \ldots

Ähnlich wie bei \pi ist auch die Konvergenz dieser Reihe nicht optimal. Man verbessert die Konvergenz, in dem man die daraus hergeleitete

Reihe (|x|<1)

\ln \frac{1+x}/{1-x}# = 2\sum\_{n=0}^\infty \frac{x^{2n+1}}/{2n+1}#

 = 2\left[x+ \frac{x^3}/{3}# + \frac{x^5}/{5}# + \frac{x^7}/{7}# +\ldots \right]

verwendet. Um \ln 2 zu berechnen, ergibt sich beispielsweise für x=1/3

\ln 2 = 2\left[ \frac{1}/{3}# + \frac{1}/{3\cdot 3^3}# + \frac{1}/{5\cdot 3^5}# +

\dots\right].

3.3.7 Beispiel: [Binomialreihe] (Übungsaufgabe!)

Wir betrachten für \alpha \in\R die Funktion f(x)=(1+x)^\alpha auf dem offenen Intervall

(-1,1). Die Ableitungen sind f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ldots

(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}. Definieren wir die verallgemeinerten Binomialkoeffizienten als

\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots (\alpha-k+1) }/{k!}# ,

so lässt sich die Taylor-Reihe von f um den Nullpunkt schreiben als

T(f,0)(x) = \sum\_{k=0}^\infty \binom{\alpha}{k} x^k.

Für \alpha\in\N\cup\{0\} ist \binom{\alpha}{k}=0, falls k>\alpha;

in diesem Fall bricht die Reihe ab und es gilt bekanntlich die Newton'sche Binomialformel

(1+x)^\alpha = \sum\_{k=0}^\alpha \binom{\alpha}{k} x^k,

welche sogar für x\in\C gilt. Für \alpha\notin\N\cup\{0\} hat die Taylor-Reihe T(f,0)(x)

den Konvergenzradius 1, denn

\left|\binom{\alpha}{k+1} \bigg/ \binom{\alpha}{k} \right|

= \left| \frac{\alpha - k}/{k+1}# \right| \longrightarrow 1 für k\rightarrow\infty.

Damit ist die Reihe in (-1,1) absolut und fast gleichmäßig konvergent.

Wir untersuchen nun das Restglied. Für 0<x<1 gilt

\sup \{ \frac{|x-y|^{n-1}}/{(n-1)!}# |f^{(n)} (y)| : 0\leq y\leq x \}

 \leq \bigg| \binom{\alpha}{n}\bigg|\cdot n\cdot |x|^{n-1}\cdot

|1+x|^{\alpha-n} \longrightarrow 0 für n\rightarrow\infty.

Tatsächlich gilt \big| \binom{\alpha}{n}\big|\cdot n\cdot |x|^{n-1}\to0

aufgrund der absoluten Konvergenz der Reihe und ihrer Ableitung, sowie offenbar |1+x|^{\alpha-n} \to 0.

Für x<0, also x\leq y\leq 0 schätzt man gemäß

 \frac{|x-y|^{n-1}}/{(n-1)!}# |f^{(n)} (y)|

= n \bigg|\binom{\alpha}{n} \bigg| |x-y|^{n-1} \frac{|1+y|^\alpha}/{|1+y|^n}#

\leq n \bigg|\binom{\alpha}{n}\bigg| \frac{1}/{1+y}# \bigg| \frac{x-y}/{1+y}# \bigg|^{n-1}

\cdot |1+x|^\alpha

ab. Da jedoch 1/(1+x)\geq 1/(1+y) und |(x-y)/(1+y)|\leq |x| für

x\leq y\leq 0 ist, folgt

\sup \frac{|x-y|^{n-1}}/{(n-1)!}# |f^{(n)} (y)| \leq\

n \bigg|\binom{\alpha}{n} \bigg| \frac{|x|^{n-1}}/{1+x}# \cdot |1+x|^\alpha

 \longrightarrow 0.

Damit konvergiert das Restglied für |x|<1 gegen Null und es ergibt sich

(1+x)^\alpha = \sum\_{k=0}^\infty \binom{\alpha}{k} x^k, x \in (-1,1).

Zwei besonders wichtig Reihenentwicklungen sind etwa mit \alpha=\pm 1/2

\sqrt{1+x} = 1+ \frac{x}/{2}# - \frac{x^2}/{2\cdot 4}#

+ \frac{1\cdot 3\cdot x^3}/{2\cdot 4\cdot 6}# -\ldots

 \frac{1}/{\sqrt{1+x}}# = 1- \frac{x}/{2}# + \frac{1\cdot 3\cdot x^2}/{2\cdot 4}#

- \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^3}/{ 2\cdot 4\cdot 6}# +\ldots

Ein wichtiges Beispiel für die letzte Näherung findet sich in der speziellen

Relativitätstheorie. So ist die kinetische Energie eines Teilchens mit Geschwindigkeit v und Ruhemasse m gegeben durch

E = mc^2\left[ \frac{1}/{\sqrt{1-(v/c)^2}}# - 1\right].

Ersetzt man in der letzten Näherung x=-(v/c)^2, dann folgt

E = \frac{1}/{2}# mv^2+ \frac{3}/{8}# mv^2 \frac{v^2}/{c^2}# +\ldots

Der erste Term ist die kinetische Energie der klassischen Mechanik,

die wichtigste relativistische Korrektur ist der zweite Term, während die nächsten Korrekturen sehr schnell sehr klein werden.