Grundlagen der Mathematik

Ilka Agricola

Version vom 29. November 2011

- nur zum internen Gebrauch im Rahmen der Mathematikausbildung am FB 12 der Philipps-Universität Marburg! –

Fachbereich Mathematik und Informatik, Philipps-Universität Marburg, Hans-Meerwein-Str., D-35032 Marburg

E-mail Addresse: [agricola@mathematik.uni-marburg.de](mailto:agricola@mathematik.uni-marburg.de)

URL: <http://www.mathematik.uni-marburg.de/~agricola/>

# Vorwort

Das vorliegende Skript enthält meine Notizen der Vorlesung „Grundlagen der Mathematik“, die als integraler Bestandteil der insgesamt sechsstündigen Vorlesung in „Linearer Algebra“ im Wintersemester 2010/11 zum ersten Mal gehalten wurde. Neben der zweistündigen Vorlesung wurden im Rahmen der Gesamtvorlesung eine zweistündige Übung sowie eine ebensolche Zentralübung angeboten und Hausaufgaben abgegeben.

Das Ziel dieser Notizen ist es, den Studenten den Einstieg in die mathematischen Vorlesungen an der Universität zu erleichtern. So manches, was an der Schule bereits angeschnitten wurde, wird hier nochmal systematisch dargestellt. Vor allem aber ist es das erklärte Ziel, die in allen mathematischen Disziplinen verwendeten Grundbegriffe darzulegen. Hervorzuheben ist, dass diese Notizen in keinster Weise ein Buch oder eine Vorlesung ersetzen; ganz im Gegenteil, im Literaturverzeichnis sind einige Bücher aufgelistet, die ich zum Studienanfang wärmstens empfehle.

Der Leser wird gebeten, mit dem ihm anvertrauten Dokument verantwortungsbewusst umzugehen. Obgleich natürlich (fast) alles, was sich hier findet, auch in irgendwelchen Büchern steht, so handelt es sich doch um mein geistiges Eigentum, für das die üblichen copyright-Regeln gelten. Insbesondere sind nur einzelne, unveränderte Kopien zum privaten Gebrauch und mit vollständigem Quellennachweis zulässig. Umgekehrt danke ich an dieser Stelle allen, die durch ihre Bücher oder ihren Unterricht direkt oder indirekt diese Notizen beeinflusst haben: besonders möchte ich darunter erwähnen meinen Mathematiklehrer André Tissot (Montbrison) und Armin Leutbecher (München), bei dem ich vor einiger Zeit selber die lineare Algebra gelernt habe auf eine Weise, die ich auch heute noch für nahezu perfekt halte. Von den Büchern von Karl Heinrich Hofmann (Darmstadt) und Kazimierz Kuratowski (1896 – 1980) habe ich mich frei (und auf sehr unterschiedliche Weise) inspirieren lassen [**Hof**], [**Kur**]. Die sicher noch enthaltenen Fehler sind natürlich nur mir und keinem der zuvor genannten zuzuschreiben; sollte der Leser einen entdecken, so bin ich für eine kurze Nachricht dankbar.

Am Ende jedes Kapitels findet der Leser eine Sammlung von Übungsaufgaben. Diese dienen dem Einüben der gelernten Begriffe, werden i. a. im weiteren Verlauf des Textes nicht gebraucht (… zumindest nicht an zentraler Stelle). Sie stellen auch einige nützliche Zusatzfakten zusammen, auf die so im Verlauf des Studiums bequem zurückgegriffen werden kann. Einige dieser Aufgaben werden Ihnen sicher in den Hausaufgaben begegnen. In den Text habe ich einige mathematische Cartoons eingestreut – denn Mathematik ist keinesfalls so humorlos, wie es der Außenstehende manchmal wahrnimmt. Die meisten dieser Zeichnungen stehen aber nicht zufällig da, wo sie stehen …

Meinen Mitarbeitern Julia Becker-Bender, Jos Höll und Sven Remde danke ich für ihre kritische Durchsicht des Manuskripts. Auf diese Weise konnten viele Schreibfehler und Ungenauigkeiten behoben werden. Zudem danke ich sehr meinem Kollegen Prof. Manfred Lehn von der Universität Mainz für die Erlaubnis, seinen beiden Texte „Wie bearbeite ich ein Übungsblatt?“ und „Wie halte ich einen Seminarvortrag?“ hier im Anhang abzudrucken. Diesen Texten ist nichts hinzuzufügen, deswegen möchte ich sie jedem Anfänger an dieser Stelle nochmal besonders empfehlen. In diesem Zusammenhang gilt das Albert Einstein zugeschriebene Zitat:

„Mach’ dir keine Sorgen wegen deiner Schwierigkeiten mit der Mathematik. Ich kann dir versichern, dass meine noch größer sind.“

Kein Student sollte sich also Sorgen machen, wenn ihm oder ihr der Stoff in diesem Heft und in den Vorlesungen schwer fällt. Alle Tutoren, Mitarbeiter und Dozenten werden aus eigener Erfahrung bestätigen, dass Mathematik schwer ist – es gibt keinen bequemen Königsweg zur mathematischen Erkenntnis. Nehmen Sie Papier und Bleistift zur Hand und fangen Sie einfach an!

Marburg, im Mai 2010 Ilka Agricola

**Inhaltsverzeichnis**

Kapitel 1. Mengenlehre und Logik 1 (5)

1.1. Aussagenlogik 1 (5)

1.2. Mengen 4 (9)

1.3. Quantoren und ihre Bedeutung in der Mathematik 6 (12)

1.4. Abbildungen 8 (15)

1.5 . Relationen 13 (21)

1.6. Exkurs: Der Begriff der Stetigkeit in der Analysis 14 (24)

Aufgaben 17 (27)

Kapitel 2. Natürliche Zahlen und das Prinzip der vollständigen Induktion 21 (30)

2.1. Natürliche und ganze Zahlen 21 (30)

2.2. Das Prinzip der vollständigen Induktion 23 (33)

2.3. Umgang mit Summen- und Produktzeichen 25 (35)

2.4. Die rationalen Zahlen 27 (38)

Aufgaben 27 (39)

Kapitel 3. Reelle und komplexe Zahlen 29 (40)

3.1. Reelle Zahlen 29 (40)

3.2. Bedeutende Ungleichungen zwischen reellen Zahlen 35 (48)

3.3. Komplexe Zahlen 37 (51)

3.4. Exkurs 1: Komplexe Geometrie in der Ebene 43 (57)

3.5. Exkurs 2: Historische Anmerkungen 46 (62)

Aufgaben 49 (64)

Kapitel 4. Mächtigkeit, Abzählbarkeit 55 (70)

4.1. Abzählbare Mengen 55 (70)

4.2. Intuitive Kardinalzahlen 57 (74)

4.3. Weitere endliche Zählargumente 59 (75)

4.4. Das Auswahlaxiom und seine Äquivalente 60 (78)

Aufgaben 62 (80)

Kapitel 5. Mathematisches Sammelsurium 65 (82)

5.1. Das Wesentliche zu quadratischen Gleichungen 65 (82)

5.2. Trigonometrie 66 (83)

5.3. Polynomdivision und Partialbruchzerlegung 67 (85)

Aufgaben 71 (90)

Anhang A. Besondere Schriften 73 (90)

Deutsche Frakturschrift 73 (91)

Griechisches Alphabet 74 (91)

Hebräische Buchstaben 75 (92)

Anhang B. Beweise in der Mathematik 77 (92)

Allgemeine Bemerkungen 77 (92)

Satz, Lemma, Proposition und Korollar 78 (93)

Beweismethoden 79 (95)

Anhang C. Wie bearbeite ich ein Übungsblatt? 81 (96)

Bearbeitungszeitraum oder Bearbeitungszeitpunkt? 81 (97)

Analyse der Aufgabenstellung 82 (98)

Reden Sie über die Aufgaben! 83 (98)

Der Moment des Aufschreibens 83 (99)

Vorrechnen an der Tafel 85 (101)

Anhang D. Wie halte ich einen Seminarvortrag? 87 (101)

Zur inhaltlichen Vorbereitung 87 (102)

Zur schriftlichen Ausarbeitung 88 (103)

Zum eigentlichen Vortrag 89 (104)

Zur Nachbereitung 92 (108)

Anhang. Literaturverzeichnis 93 (109)

Anhang. Namens- und Sachverzeichnis 95 (110)

<Seite 1>

# Kapitel 1: Mengenlehre und Logik

## 1.1. Aussagenlogik

Die Mathematik ist eine Sprache, die nur gesprochen und verstanden werden kann, wenn man ihre Grammatik und Orthographie beherrscht. Deswegen steht am Anfang aller höherer Mathematik die Beschäftigung mit dem Wortschatz der Mathematik – der Mengenlehre – und ihrer Grammatik – den elementaren Regeln der Logik.

Grundsätzlich beschäftigt sich die Logik mit Aussagen. Beispiele sind

(1) 7 ist eine Zahl,

(2) 1 plus 1 ist 3,

(3) alle Katzen sind grau,

(4) Die Partei x wird bei der nächsten Bundestagswahl die meisten Stimmen

bekommen.

Aussagen sollen klar entscheidbar wahr oder falsch sein, auch wenn man (wie etwa im letzten Fall) den Wahrheitsgehalt noch nicht feststellen kann. Dagegen ist „\pi schmeckt nach Himbeere“ keine zulässige Aussage.

Die elementaren „Grammatikregeln“ der Logik erlauben es nun, aus gegebenen Aussagen neue zu bilden, unabhängig vom Inhalt der gegebenen Aussage.

Die Äquivalenz zweier Aussagen: Zwei Aussagen p und q heißen äquivalent, falls sie beide gleichzeitig wahr oder gleichzeitig falsch sind. Man schreibt dann p \Leftrightarrow q.

Die Negation einer Aussage: Ist p eine Aussage, so ist \neg p (gelesen:

„nicht p“) auch eine Aussage, die wie folgt definiert wird: \neg p ist genau dann

wahr, wenn p falsch ist. Dies drückt man gern durch sog. Wahrheitstafeln

aus, in der jeder der möglichen Fälle in einer eigenen Zeile dargestellt wird:

|  |  |
| --- | --- |
| p | \neg p |
| w | f |
| f | w |

Die Verknüpfung „und“: Sind p und q Aussagen, so ist auch p \wedge q („p und q“) eine Aussage, die wie folgt definiert wird: p \wedge q ist genau dann wahr, wenn p und q wahr sind.

Die Verknüpfung „oder“: Sind p und q Aussagen, so ist auch p \vee q („p oder q“) eine Aussage, die wie folgt definiert wird: p \vee q ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen p und q wahr ist.

Wir fassen die beiden letzten Definitionen mit Hilfe ihrer Wahrheitstafeln zusammen:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| p | q | p \wedge q | p \vee q |
| w | w | w | w |
| f | w | f | w |
| w | f | f | w |
| f | f | f | f |

Es ist also zu beachten, dass hier die Verknüpfung „oder“ nicht als „entweder oder“ gemeint ist.

**<lemma> Lemma 1** (de Morgan’sche Gesetze (für Aussagen))**.** Für beliebige Aussagen p und q gilt:

(1) \neg \neg p \Leftrightarrow p,

(2) \neg (p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q),

</Seite 1><Seite 2>

(3) \neg (p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q). </lemma>

Wir überlegen kurz, was das bedeutet. Je nachdem, aus welcher Gegend des Landes man kommt, wird eine doppelte Verneinung („ich mag kein Brot nicht“) als die ursprüngliche Aussage verstanden oder aber mit der einfachen Verneinung gleichgesetzt, mitunter ist die Interpretation auch kontextabhängig („Ich bin nicht unglücklich“ soll verstanden werden als: ich bin nicht unglücklich, aber auch nicht wirklich glücklich). In der Logik entspricht die doppelte Verneinung immer der ursprünglichen Aussage. Die Regeln (2) und (3) besagen, dass die Negation ein

„oder“ in ein „und“ verwandelt (und umgekehrt). Intuitiv ist das klar: Das Gegenteil der Aussage

„Der Pullover ist rot oder grün“

ist eben

„Der Pullover ist nicht rot und er ist auch nicht grün“.

Dies ist aber kein mathematischer Beweis! Für diesen verwendet man am einfachsten wieder die Wahrheitstafeln.

**<beweis>**Die erste Regel ist einfach, denn nach Definition ist

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| p | \neg p | \neg (\neg p) |
| w | f | w |
| f | w | f |

und man sieht, dass die erste und die letzte Spalte identisch sind. Nach Definition sind damit die Aussagen p und \neg \neg p äquivalent.

Um (2) zu beweisen, fülle man ebenso eine geeignete Wahrheitstafel aus,

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p | q | p \wedge q | \neg (p \wedge q) | \neg p | \neg q | \neg p \vee \neg q |
| w | w |  |  |  |  |  |
| w | f |  |  |  |  |  |
| f | w |  |  |  |  |  |
| f | f |  |  |  |  |  |

und prüfe, dass die vierte und letzte Spalte übereinstimmen.

Ähnlich verfährt man für (3) (Übungsaufgabe)

</beweis> (Ende des Beweises)

Es fehlt uns noch eine wichtige Verknüpfung von Aussagen, die Implikation:

Die Implikation p \Rightarrow q: Sind p und q Aussagen, so sagen wir,

„p impliziert q“ (geschrieben p \Rightarrow q), falls q oder \neg p gilt.

Auf den ersten Blick ist das nicht das, was wir uns unter einer Folgerung vorstellen. Der Punkt ist, dass zwischen p und q kein kausaler Zusammenhang bestehen muss, sondern es soll nur gelten: falls p wahr ist, ist auch q wahr. Wir betrachten die Wahrheitstafel der soeben gegebenen Definition:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| p | q | p \Rightarrow q |
| w | w | w |
| f | w | w |
| f | f | w |
| w | f | f |

In den ersten beiden Zeilen ist q wahr, in der zweiten und dritten Zeile ist p falsch (\Leftrightarrow \neg p wahr), also ist in allen drei Fällen auch p \Rightarrow q wahr. Dass p \Rightarrow q falsch ist, liegt nur in einem Fall vor, nämlich dann, wenn q falsch ist, obwohl p wahr ist – und das entspricht wieder der Intuition.

Ein Beispiel zeigt wieder, dass die Logik per se nicht geeignet ist, über kausale Zusammenhänge zu entscheiden. Wir stellen uns einen Stamm irgendwo in einem abgelegenen Alpental vor, der bei Sonnenfinsternis immer Alphorn bläst, um die Sonne wieder erscheinen zu lassen. Es gilt:

Wenn man bei Sonnenfinsternis Alphorn bläst, erscheint die Sonne wieder, oder kürzer: Albhorn blasen \Rightarrow Sonne erscheint.

</Seite 2><Seite 3>

Das glauben Sie nicht? Bisher hat das immer funktioniert! Vom Standpunkt der Logik ist die Aussage nicht zu beanstanden, auch wenn der aufgeklärte Weltbürger hier schwer einen Zusammenhang zu erkennen vermag.

Die Implikation hat noch eine weitere erstaunliche Eigenschaft: Aus einer falschen Aussage p kann man alles Mögliche herleiten, sowohl Richtiges als auch Falsches. Wenn Sie mit 1 plus 1 ist 3 beginnen, können Sie den herrlichsten mathematischen Unfug herleiten… aber nicht sicher sein, dass alles, was Sie herleiten, wirklich Unfug ist! Das Einzige, was man sagen kann, ist, dass der gegebene Beweis falsch ist (es könnte aber ein anderer, richtiger existieren).

**<lemma> Lemma 2.** Für beliebige Aussagen p und q gilt: p \Leftrightarrow q gilt genau dann, wenn p \Rightarrow q und q \Rightarrow p gilt. </lemma>

Den – einfachen – Beweis führt man wieder mittels Vergleich der entsprechenden Wahrheitstafeln.

**<definition> Definition 1.** Unter einer Tautologie versteht man eine Verknüpfung von einer oder mehreren Aussagen, die immer wahr ist, egal welchen Wahrheitswert die einzelnen Aussagen haben. Folgende Verknüpfungen sind Tautologien:

(1) p \vee \neg p: egal, was p ist, entweder gilt p oder \neg p.

(2) (p \wedge q) \Rightarrow p: aus der Gültigkeit von p und q folgt die Gültigkeit

von p. </definition>

Eine Tautologie ist für die Mathematik von besonderer Bedeutung – dies ist die sog. Kontraposition.

**<lemma> Lemma 3** (Kontraposition)**.** Für beliebige Aussagen p und q gilt: p \Rightarrow q gilt genau dann, wenn \neg q \Rightarrow \neg p gilt. Anders ausgedrückt:

(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)

ist eine Tautologie. </lemma>

Wieder illustrieren wir dies an einem Beispiel. Offenbar gilt:

es regnet (r) \Rightarrow ich habe einen Regenschirm dabei (s), oder kürzer:

r \Rightarrow s.

Wenn ich den Regenschirm dabei habe, können Sie dann schließen, dass es regnet? Nein, denn es könnte andere Gründe geben, einen Schirm dabei zu haben (ich habe ihn gerade gekauft, ich verwende ihn als Spazierstock usw.). Logisch: es kann noch andere Aussagen p, q, … geben, für die auch p \Rightarrow s,

q \Rightarrow s, … gilt. Eine Aussage ist nur dann möglich, wenn ich keinen Schirm dabei habe: Dann kann es auf jeden Fall nicht regnen. Nun der formale Beweis.

**<beweis>**Wir erweitern die bereits gegebene Wahrheitstafel für p \Rightarrow q um einige Einträge:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p | q | p \Rightarrow q | \neg q | \neg p | \neg q \Rightarrow \neg p |
| w | w | w | f | f | w |
| f | w | w | f | w | w |
| f | f | w | f | f | w |
| w | f | f | w | f | f |

Wieder sieht man, dass die dritte und sechste Spalte übereinstimmen.

</beweis>

**<bemerkung> Bemerkung 1** (Widerspruchsbeweis)**.** Dieses Ergebnis ist von großer beweistechnischer Bedeutung: Wenn es schwierig ist, p \Rightarrow q direkt einzusehen, kann es mitunter einfacher sein, anzunehmen, dass q falsch sei, und daraus zu folgern, dass auch p falsch sein muss. Einen solchen sog. Widerspruchsbeweis erkennt man oft (aber nicht immer…) an einer Bauart des Typs „Angenommen, q wäre falsch. Dann müsste … [… ein paar Zeilen / Seiten später …], also ist auch p falsch, was aber nicht sein kann, Widerspruch.“ An dieser Stelle ist der Beweis meist zu Ende. Logisch müsste man noch hinzusetzen: Es wurde damit gezeigt, dass auch p falsch ist, d.h. \neg q \Rightarrow \neg p; dies ist aber gleichbedeutend mit p \Rightarrow q, also gilt q doch und die sog. Widerspruchsannahme \neg q war falsch.

</bemerkung>

</Seite 3><Seite 4>

## 1.2. Mengen

(*Fußnote 1*: Georg Cantor, geb. 1845 in Sankt Petersburg, gest. 1918 in Halle an der Saale. Studium der Mathematik in Darmstadt, Zürich und Göttingen; nach seiner

Promotion in Berlin bei Weierstraß und Kronecker (1867) wirkte er bis an sein Lebensende in Halle. Er gilt als Begründer der Mengenlehre.)

**<definition> Definition 2.** Wir folgen Georg Cantors Definition(1895):

„Unter einer ‚Menge’ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche ‚Elemente’ von M genannt werden, zu einem Ganzen.“

Man schreibt m \in M, falls m ein Element von M ist, anderenfalls m \not in M. Unter der leeren Menge \{ \} versteht man die (einzige) Menge, die keine Elemente hat.

</definition>

Beispiele von Mengen lassen sich leicht finden:

(1) Die Zusammenfassung aller Studenten im Hörsaal bildet eine Menge.

(2) Die natürlichen Zahlen, 0, 1, 2, 3, … bilden eine Menge, die gewöhnlich \N

geschrieben wird.

(3) Die ganzen Zahlen 0, \pm 1, \pm 2, … bilden die Menge \Z.

(4) Die rationalen Zahlen \Q = \{ p/q: p \in \Z, q \in \N \} sind eine Menge.

(5) Die reellen Zahlen \R. Sie enthalten alle rationalen Zahlen und alle Limiten von

konvergenten Folgen rationaler Zahlen (\rightarrow Analysis 1); ihre genaue   
 Konstruktion werden wir später im Verlauf der Vorlesung noch kennen lernen.

**<definition> Definition 3.** Seien X und Y zwei Mengen. Man sagt, dass X in Y enthalten ist (und schreibt X \subset Y), falls jedes Element von X auch ein Element von Y ist. </definition>

Gilt X \subset Y und Y \subset X, dann sind die Mengen X, Y gleich und man schreibt X = Y.

Will man umgekehrt zeigen, dass X = Y ist, so ist es nötig, X \subset Y und Y \subset X zu beweisen.

Einzelne Elemente können wieder zu Mengen zusammengefasst werden. Dies geschieht immer mit geschweiften Klammern \{ … \}, wie im folgenden Beispiel.

(*Fußnote 2:* Insbesondere heißt das, dass \{ x, y \} etwas anderes meint als (x, y): Das Erste ist die Menge, die die Elemente x und y enthält, das zweite dagegen das geordnete Paar, das an erster Stelle aus x, an zweiter Stelle aus y besteht. Es ist immer \{ x, y \} = \{ y, x \}, aber (x, y) = (y, x) nur dann, wenn x = y gilt.)

Besteht eine Menge X aus nur einem einzigen Element x, also X = \{ x \}, dann schreibt man verkürzt x \in Y („x ist ein Element der Menge Y“) an Stelle von

\{ x \} \subset Y.

**<beispiel> Beispiel 1.**Seien \K die rationalen oder reellen Zahlen. Wir betrachten die Mengen

A\_\K = \{ x \in \K: x \ge 0 \},

B\_\K = \{ x \in \K: es ex. mindestens ein y \in \K mit x = y^2 \}.

Wir werden später sehen: Für \K = \R ist A\_\R = B\_\R, aber für \K = \Q gilt nur

B\_\Q \subset A\_\Q (ohne Gleichheit). An dieser Stelle eine Bemerkung zur Notation: Unter \{x: p(x) \} oder \{ x | p(x) \}

versteht man die Menge aller möglichen Werte für die Größe x, die die Eigenschaft p(x) haben. Dabei können die Werte von x völlig beliebige Elemente einer klar festgelegten Menge sein (Punkte, Funktionen, …). Zum Beispiel ist

\{ x \in \R: x = x + 1 \} = \{ \}.

</beispiel>

**<definition> Definition 4.** Aus jeder Menge X kann man deren Potenzmenge bilden,

\wp(X) := \{ Y: Y \subset X \}. </definition>

*Bemerkung: \wp bedeutet kleines verschnörkeltes p.*

Die Potenzmenge von X ist also die Menge, deren Elemente sämtliche Teilmengen von X sind. Zum Beispiel ist \wp(\{ \}) = \{ \{ \} \}: die Potenzmenge der leeren Menge ist die Menge, die als einziges Element die leere Menge hat. Für eine nichtleere Menge X hat die Potenzmenge immer mindestens zwei Elemente, nämlich \{ \} und X selber, und die sind in diesem Fall nicht gleich.

Aus zwei gegebenen Mengen X, Y kann man wieder neue Mengen bilden, etwa:

(1) Durchschnitt X \cap Y: X \cap Y := \{ z: z \in X und z \in Y \}

(2) Vereinigung X \cup Y: X \cup Y := \{ z: z \in X oder z \in Y \}

</Seite 4><Seite 5>

(3) Differenz X – Y: X – Y = \{ z: z \in X und z \not in Y \}

Zwei Mengen heißen disjunkt, falls X \cap Y = \{ \}. Es gilt immer X \cap Y = Y \cap X sowie X \cup Y = Y \cup X, aber X – Y \not= Y – X.

*<abbildung> Beschreibung: In der Zeichnung wird die Menge X durch einen kleinen Kreis dargestellt, die Menge Y durch einen etwas größeren Kreis. Beide Kreise überschneiden sich, aber überdecken sich nicht. Diese Figur ist dreimal gezeichnet:*

*In der 1. Figur soll X \cap Y, in der 2. Figur X \cup Y und in der 3. Figur X – Y markiert werden.*

*</abbildung>*

**<lemma> Lemma 4.**

(1) Es gilt das Assoziativgesetz:

A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.

(2) Es gilt das Distributivgesetz:

A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),

A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).

(3) Sind A, B beliebige Teilmengen von X, so gilt:

X – (A \cup B) = (X – A) \cap (X – B), X – (A \cap B) = (X – A) \cup (X – B).

</lemma>

**<beweis>**Übung.

</beweis>

**<bemerkung> Bemerkung 2.** Das Zeichen – für die Differenz soll Sie nicht dazu verleiten, auf Mengen mit einer Addition und einer Subtraktion (und den dafür bekannten Rechenregeln … ) zu rechnen! Man hätte auch statt A – B schreiben können A \ast B, A \diamond B etc. *(Bemerkung: \ast bedeutet „Sternchen“, \diamond eine auf der Spitze stehende Raute)*

Auch Umformungen der Art „A – B = C, also A – C = B“ sind falsch, wie das folgende Beispiel zeigt:

A = \{ 1, 2 \}, B = \{ 2, 3 \}, A – B = \{ 1 \} =: C, A – C = \{ 2 \} \not= B.

Manche Autoren verwenden die Schreibweise A \setminus B für A – B (dies soll an ein schräg gestelltes Minuszeichen erinnern).

</bemerkung>

**<definition> Definition 5.** Zu gegebenen Mengen X und Y definiert man deren kartesisches Produkt, geschrieben X x Y, als die Menge aller Paare (x, y), wobei x \in X und y \in Y ist. </definition>

Für X = Y = \R ist zum Beispiel \R x \R ein mögliches Modell der Ebene, in dem etwa die x-Achse aus den Punkten der Form (x, 0) \in \R x \R besteht.

Als Modell eines Zylinders kann das kartesische Produkt einer Strecke I mit einer Kreislinie S dienen.

Sind etwa X\_A und X\_B die Mengen aller Äpfel und Birnen, dann ist

X\_A \cup X\_B = \{ alle Elemente, die entweder Äpfel oder Birnen sind \}

X\_A \cap X\_B = \{ \} (es gibt kein Element, dass gleichzeitig Apfel und Birne ist)

X\_A x X\_B = \{ (a, b) | a ist ein Apfel, b ist eine Birne \}.

In vielen Gebieten der Mathematik wird man Teilmengen A, B, … einer größeren Menge X betrachten - die Rechenregel (3) zeigte schon in diese Richtung. Diese Menge X wird dann weitere Eigenschaften haben, die daraus einen „Raum“

machen – in der linearen Algebra etwa ein Vektorraum, in der Analysis ein Funktionenraum, in der Geometrie der umgebende Raum usw. Wir wollen diese hier nicht definieren, aber eine in diesem Zusammenhang wichtige Konstruktion diskutieren.

**<definition> Definition 6** (Komplement)**.** Das Komplement A^c der Teilmenge A \subset X ist A^c := X – A.

Die Bezeichnungen für das Komplement einer Menge sind leider nicht einheitlich! Es ist genau dann x \in A^c, wenn x \not \in A gilt, oder mit den Zeichen der Logik: x \in A^c \Leftrightarrow \neg (x \in A).

</definition>

Man überlegt sich leicht:

</Seite 5><Seite 6>

(1) X^c = \{ \}, \{ \}^c = X

(2) A^{cc} = A (dies entspricht der Regel \neg \neg p \Leftrightarrow p)

(3) A \cup A^c = X, A \cap A^c = \{ \}

Wir beweisen einige nicht ganz so triviale Eigenschaften des Komplements. Die Aussagen (3) und (4) des folgenden Lemmas sind auch als de Morgan’sche Gesetze für Mengen bekannt.

**<lemma> Lemma 5.** Für beliebige Teilmengen A, B \subset X gilt:

(1) A – B = A \cap B^c,

(2) A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c,

(3) (A \cup B)^c =A^c \cap B^c,

(4) (A \cap B)^c = A^c \cup B^c. </lemma>

**<beweis> Beweis.**

(1) Nach Definition ist genau dann x \in A – B, wenn x \in A und x \not in B. Diese zweite Bedingung bedeutet aber genau x \in B^c.

(2) Folgt aus dem Kontrapositionslemma

( (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)), denn A \subset B kann man verstehen als x \in A \Rightarrow x \in B, und dies ist also äquivalent zu

\neg (x \in B) \Rightarrow \neg (x \in A), was genau B^c \subset A^c bedeutet.

(3) Wir führen diesen Beweis stilistisch sehr unschön vor, weil es sehr viel ökonomischer ist und die logischen Beziehungen klarmacht:

x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow \neg (x \in (A \cup B)) \Leftrightarrow

\Leftrightarrow \neg (x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow

\Leftrightarrow \neg (x \in A) \wedge \neg (x \in B) \Leftrightarrow

\Leftrightarrow x \in (A^c \cap B^c).

Dabei wurde im vorletzten Schritt das entsprechende de Morgan’sche Gesetz für Aussagen verwendet.

Eigenschaft (4) beweist man ganz analog.

</beweis>

Die hier dargelegten Grundlagen der Mengenlehre finden ihre mathematisch saubere axiomatische Beschreibung in der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre, so benannt nach Ernst Zermelo und Abraham Adolf Fraenkel. Sie ist heute die Grundlage fast aller Zweige der Mathematik.

*Fußnote 3*: Abraham Adolf (später Abraham Halevi) Fraenkel, geb. 1891 in München, gest. 1965 in Jerusalem. Studium der Mathematik in München, Marburg, Berlin und Breslau. In Marburg Promotion 1914 bei Kurt Hensel, Habilitation 1916 (trotz Kriegsdienstverpflichtung), danach Privatdozent. 1929 Emigration nach Israel, Professor an der Universität Jerusalem bis zu seiner Emeritierung. Beiträge zur Theorie der p-adischen Zahlen, bekannt v. a. wegen seiner Werke zur Mengenlehre. Im übrigen herrschte schon damals Wohnungsmangel in Marburg, nach dem ersten Weltkrieg lebte Fraenkel mit seiner Frau einige Jahre zur Untermiete bei Hensel.

## 1.3. Quantoren und ihre Bedeutung in der Mathematik

Da die Mathematik gern quantitative Aussagen macht, sind sog. Quantoren nützlich. Sie helfen, folgende Aussagen zu unterscheiden:

(1) Es gibt mindestens einen Studenten im Hörsaal, dessen Bruder von Beruf

Astronaut ist.

(2) Die Brüder aller Studenten im Hörsaal sind von Beruf Astronaut.

(1) ist schon eher unwahrscheinlich, (2) völlig unrealistisch. Man führt folgende Bezeichnungen ein (dabei ist x ein Element einer beliebigen Menge X):

(1) \exists x: p(x): „es existiert mindestens ein x mit der Eigenschaft p(x)“

(Existenzquantor).

(2) \forall x: p(x): „für alle x gilt die Eigenschaft p(x)“ (universeller Quantor).

Ist also X die Menge aller Studenten im Hörsaal, p(x) die Eigenschaft, dass ein Bruder von x Astronaut ist, so ist Aussage (1) gleichbedeutend mit

\exists x \in X: p(x), Aussage (2) dagegen mit \forall x \in X: p(x).

Als weiteres Beispiel betrachten wir

\exists x \in \R: x > 0: wahr, \forall x \in \R: x > 0: falsch.

In folgendem Sinn verallgemeinern die Symbole \exists, \forall das logische oder (\vee) bzw. und (\wedge): Ist X = \{ x\_1, …, x\_n \} endlich, so gilt nämlich

(1) \exists x \in X: p(x) \Leftrightarrow [p(x\_1) \vee … \vee p(x\_n)],

(2) \forall x \in X: p(x) \Leftrightarrow [p(x\_1) \wedge … \wedge p(x\_n)].

</Seite 6><Seite 7>

Wir gehen nun auf ein etwas realistischeres Beispiel ein. Sei X wie eben, p(x): Die Mutter von x ist Professorin, q(x): der Vater von x ist Qualitätsprüfer (oder was auch immer Sie in beiden Fällen mögen). Wir betrachten die Gesamtaussage

A: „Es ex. ein Student, dessen Mutter Professorin ist, und es ex. ein Student, dessen

Vater Qualitätsprüfer ist.“

Kann man diese Aussagen in eine zusammenfassen? Falsch ist offenbar die Umformung

B: „Es ex. ein Student, dessen Mutter Professorin und dessen Vater Qualitätsprüfer

ist“,

denn es muss sich bei beiden Fällen in A nicht um den gleichen Studenten handeln. Logisch formuliert bedeutet dies:

\exists x: p(x) und \exists x: q(x) \not Rightarrow \exists x: p(x) und q(x).

Wohl aber gilt natürlich die Gegenrichtung,

(\ast) \exists x: p(x) und q(x) \Rightarrow \exists x: p(x) und \exists x: q(x).

(Man nehme auf der rechten Seite zweimal das gleiche Element x.) Beschränkt man sich bei A dagegen darauf, dass nur eine der beiden Aussagen gelten soll,

A’: „Es ex. ein Student, dessen Mutter Professorin ist, oder es ex. ein Student,

dessen Vater Qualitätsprüfer ist.“,

dann ist dies wirklich gleichbedeutend mit

B’: „Es ex. ein Student, dessen Mutter Professorin oder dessen Vater Qualitätsprüfer

ist.“,

denn man sieht leicht, dass A’ \Rightarrow B’ und B’ \Rightarrow A’. Dies ist genau die Aussage (1) des folgenden Lemmas. Aussage (2) des Lemmas ist genau die Implikation (\ast). Die beiden anderen Aussagen sind die Analoga für den universellen Quantor; auch hier findet man leicht Aussagen, die den jeweiligen Sachverhalt illustrieren.

**<lemma> Lemma 6.** Sei x in einer beliebigen Menge X und p(x), q(x) Aussagen. Dann gilt

(1) [\exists x: p(x) oder \exists x: q(x)] \Leftrightarrow \exists x: [p(x) oder q(x)]

(2) \exists x: p(x) und q(x) \Rightarrow \exists x: p(x) und \exists x: q(x)

(3) [\forall x: p(x) und \forall x: q(x)] \Leftrightarrow \forall x: [p(x) und q(x)]

(4) \forall x: p(x) oder \forall x: q(x) \Rightarrow \forall x: p(x) oder q(x)

Von besonderem Interesse sind die Negationen der Aussagen \exists x: p(x) und \forall x: p(x). Ein gängiger Anfängerfehler besteht darin, \neg (\exists x: p(x)) gleichzusetzen mit \exists x: \neg p(x), also gewissermaßen:

*Bemerkung: \stackrel{a + b }{5} bedeutet, dass über a + b eine 5 steht*

\neg (es ex. mindestens ein Student, dessen Bruder Astronaut ist)

\stackrel{?}{=} es ex. mind. ein Student, dessen Bruder nicht Astronaut ist.

Dies ist offenbar Unsinn, da beide Aussagen (im Prinzip …) gleichzeitig wahr sein können! Die richtige Negation ist:

Für jeden Studenten gilt, dass der Bruder nicht Astronaut ist.

Ebenso:

\neg (Die Väter aller Studenten haben blaue Augen) = es ex. mindestens ein Student, dessen Vater nicht blaue Augen hat.

Wir fassen dies wieder als Lemma zusammen:

**<lemma> Lemma 7.** \neg (\exists x: p(x)) \Leftrightarrow \forall x: \neg p(x) sowie

\neg (\forall x: p(x)) \Leftrightarrow \exists x: \neg p(x). </lemma>

Ergebnisse wie in diesen beiden Lemmata sollte man natürlich nicht formal auswendig lernen; vielmehr sollte man in so vielen Situationen wie möglich ihre konkrete Anwendung üben (bzw. sich derer bewusst werden). Die Vorlesung wird Ihnen dazu viele Gelegenheiten bieten.

</Seite7><Seite 8>

Am Ende werden Ihnen diese Sachverhalte so in Fleisch und Blut übergehen, dass Sie darüber nicht mehr nachdenken.

Ein wichtiger Anwendungsfall für Quantoren sind kartesische Produkte. Sei etwa

Z = X x Y das kartesische Produkt der Mengen X und Y, p(z) = p(x, y) eine Aussage über ein geordnetes Paar z = (x, y) \in X x Y. Quantoren können nur in den wenigsten Fällen die Rollen tauschen, etwa bei

\forall x, \forall y: p(x, y) \Leftrightarrow \forall y, \forall x: p(x, y)

\exists x, \exists y: p(x, y) \Leftrightarrow \exists y, \exists x: p(x, y)

In allen anderen Fällen ist Vorsicht geboten! Betrachte etwa wieder die beiden folgenden Aussagen:

A: Zu jedem vorgegebenen Tag existiert mindestens ein Mensch, der an diesem Tag

geboren wurde („\forall Tage \exists Mensch, derart, dass …“).

B: Es existiert mindestens ein Mensch, der an jedem Tag geboren wurde

(„\exists Mensch \forall Tage derart, dass …“).

Dass die erste Aussage wahr ist, beruht auf der bemerkenswerten Tatsache, dass an jedem beliebigen Tag mindestens ein Mensch geboren wird, die zweite Aussage ist grober Unfug.

Auch für reelle Zahlen überlegt man sich leicht ein Beispiel, dass die Wichtigkeit der Rolle der Quantoren illustriert:

C: \forall y \in \R \exists x \in \R: y < x: zu jeder Zahl y findet man eine reelle Zahl x, die größer ist als y, y < x.

D: \exists x \in \R \forall y \in \R: y < x: es existiert eine reelle Zahl x derart, dass für jede weitere reelle Zahl y diese kleiner ist als x, y < x.

Offensichtlich ist auch hier C richtig, aber D falsch.

**<beispiel> Beispiel 2.** Eine Funktion f: \R \rightarrow \R heißt beschränkt, falls es ein y \in \R gibt derart, dass für jedes x \in \R gilt: |f(x)| \le y. In Kurzschreibweise:

\exists y \forall x: |f(x)| \le y. Kehrt man die Reihenfolge der Quantoren um,

\forall x \exists y: |f(x)| \le y, so erhält man eine Aussage, die für alle Funktionen (nicht nur die beschränkten) richtig ist: Für jeden Punkt x findet sich ein y mit

|f(x)| \le y (z.B. y = |f(x)|, |f(x)| + 1, …). </beispiel>

Wie formuliert man nun sauber, dass eine Funktion nicht beschränkt ist? Sauber gedacht muss es zu jeder (noch so großen) Zahl y ein x geben mit f(x) > y. In Kurzschreibweise: \forall y \exists x: |f(x)| > y. Ganz allgemein gilt:

**<lemma> Lemma 8.**

(1) \neg (\exists y \forall x: p(x, y)) \Leftrightarrow \forall y \exists x: \neg p(x, y).

(2) \neg (\forall x \exists y: p(x, y)) \Leftrightarrow \exists x \forall y: \neg p(x, y). </lemma>

Ein Paradebeispiel für einen mathematischen Begriff, der auf diese Weise gebildet wird, ist der der Stetigkeit einer Abbildung in einem Punkt. Dies wird in der Analysis 1 eingehend thematisiert werden; wichtig ist, sich dann sorgfältig wieder und wieder klarzumachen, was die gegenteilige Aussage ist (i. e., dass eine Abbildung in einem Punkt unstetig ist). Im Exkurs 1.6 wird das Wesentliche hierzu zusammengestellt.

## 1.4. Abbildungen

**<definition> Definition 7.** Seien X und Y beliebige Mengen. Als Abbildung von X nach Y bezeichnet man jede Vorschrift f, die jedem Element x \in X genau ein Element y \in Y zuordnet. Man schreibt dann

f: X \rightarrow Y, x \mapsto y =: f(x).

</definition>

*(Bemerkung: „\mapsto“ bedeutet ein Pfeil nach rechts mit einem senkrechten Strich am Anfang.)*

</Seite8><Seite 9>

f(x) heißt Wert der Abbildung f an der Stelle x. Es wird nicht verlangt, dass jedes y \in Y als Wert von f vorkommt. X ist der Definitionsbereich, Y der Wertebereich der Abbildung f. Jeder Abbildung f ordnet man eine Teilmenge G\_f \subset X x Y zu, den Graphen von f:

G\_f := \{ (x, y) \in X x Y: f(x) = y \}.

**<beispiel> Beispiel 3.** Im Fall X = Y = \R ist x \mapsto \sqrt {x} keine Abbildung, denn negative Zahlen haben keine reelle Quadratwurzel. </beispiel>

**<beispiel> Beispiel 4.** In der Ebene X = Y = \R^2 bilden die Translationen, die Drehungen um Punkte sowie die Geradenspiegelungen Abbildungen der Ebene in sich. </beispiel>

**<beispiel> Beispiel 5.** Ist X eine beliebige Menge, dann definiert die Vorschrift x \mapsto x eine Abbildung von X nach X, genannt „Identität / identische Abbildung von X“. Man schreibt sie Id\_X oder id\_X. Wenn klar ist, welche Menge gemeint ist, lässt man den unteren Index X auch oft weg. </beispiel>

**<beispiel> Beispiel 6.** Sei f: X \rightarrow Y eine Abbildung. Für jede Teilmenge Z \subset X liefert die Vorschrift x \mapsto f(x) für x \in Z auch eine Abbildung von Z nach Y, genannt die Einschränkung oder Restriktion von f auf Z. Man schreibt dafür f|\_Z. </beispiel>

**<beispiel> Beispiel 7.** Jede Zahlenfolge a\_1, a\_2, … ist nichts anderes als eine Abbildung

a: \N \rightarrow \R. Mitunter bringt man die Absicht des Indizierens auch durch die alternative Notation (a\_n)\_{n \in \N} zum Ausdruck. Insbesondere hat es sich eingebürgert, a\_n statt a(n) zu schreiben.

Allgemeiner: Seien I und X beliebige Mengen, wobei I als Indexmenge dienen soll. Unter einem mit I indizierten System von Elementen in X bezeichnet man jede Abbildung x: I \rightarrow X. Hierfür schreibt man dann (x\_i)\_{i \in \I}. </beispiel>

**<beispiel> Beispiel 8.** Ist f: X \rightarrow X eine Abbildung einer Menge in sich, dann sind die Fixpunkte dieser Abbildung von besonderem Interesse. Dies sind per Definition genau die Punkte, die f(x) = x erfüllen. Eine Translation um einen Vektor \not= 0 hat keine Fixpunkte, eine Drehung hat als Fixpunkt ihren Mittelpunkt. Für die identische Abbildung ist jeder Punkt ein Fixpunkt. </beispiel>

**<beispiel> Beispiel 9.** Als Mengensysteme bezeichnet man indizierte Systeme (X\_i)\_{i \in I}, deren Werte X\_i beliebige Mengen sind. </beispiel>

Mengensysteme bieten die Möglichkeit Durchschnitt, Vereinigung und kartesisches Produkt zu verallgemeinern:

(1) Vereinigung: \cup\_{i \in I} X\_i := \{ x|es gibt mindestens ein i \in I mit x \in X\_i \}

(2) Durchschnitt: \cap\_{i \in I} X\_i := \{ x | x \in X\_i \forall i \in I \}

(3) kartesisches Produkt: \prod\_{i \in I} X\_i

:= \{ alle Abb. x: I \rightarrow \cup\_{i \in I} X\_i mit x\_i \in X\_i \forall i \in I \}.

Während die ersten beiden Definitionen nahe liegend sind, kann die letzte konzeptionelle Schwierigkeiten bereiten. Wir betrachten deswegen den Fall näher, dass I = \N ist. In diesem Fall handelt es sich um das kartesische Produkt abzählbar vieler Mengen; nach dem zuvor gesagten ist eine Abbildung

x: \N \rightarrow X =: \cup\_{i \in I} X\_i aber nichts anderes als eine Folge (mit Werten in den nicht näher spezifizierten Mengen X\_i). Ist z.B. X\_i = \R für alle i \in I = \N, dann ist \R^N nichts anderes als die Menge aller reellwertigen Folgen.

**<beispiel> Beispiel 10.** Für ein kartesisches Produkt von Mengen \prod\_{i \in I} X\_i kann man sofort wieder eine wichtige Abbildung definieren: Die Projektion auf die i-te Komponente, \pi\_i: \prod\_{i \in I} X\_i \rightarrow X\_i, \pi\_i (x) = x\_i. <beispiel>

**<bemerkung> Bemerkung 3** (Entartungsfälle)**.** Die Mengen X\_ibrauchen im Allgemeinen in keinerlei Beziehung zueinander zu stehen. Ist eine der Mengen X\_i leer, also

X\_{i\_0} = \{ \} für ein i\_0 \in I, dann ist

</Seite 9><Seite 10>

diese Menge für die Vereinigung irrelevant,

\cup\_{i \in I} X\_i = \cup\_{i \in I - \{ i\_0 \}} X\_i.

Der Durchschnitt und das kartesische Produkt sind in dieser Situation automatisch leer,

\cap\_{i \in I} X\_i = \{ \}, \prod\_{i \in I} X\_i = \{ \},

denn es kann kein Element x geben, das in X\_{i\_0} = \{ \} liegt. </bemerkung>

**<bemerkung> Bemerkung 4** (Auswahlaxiom)**.** Das Auswahlaxiom ist eine Aussage über kartesische Produkte von sehr vielen Mengen. Es spielt im Rahmen dieser Vorlesung (wie in der Mathematik überhaupt) eine wichtige Rolle – wir werden später darauf zurückkommen. Es besagt:

Jedes System von nichtleeren Mengen \{ \} \not= X\_i, i \in I, besitzt ein nichtleeres kartesisches Produkt \prod\_{i \in I} X\_i, d.h. es gibt mindestens eine „Auswahlfunktion“ f: I \rightarrow \cup\_{i \in I} X\_i mit f(i) \in X\_i für alle i \in I.

Es kann in folgendem Sinne nicht bewiesen werden: Die klassische Mengenlehre ist in sich widerspruchsfrei, sowohl wenn das Auswahlaxiom gilt als auch wenn seine Negation gilt! Die Tücke liegt darin, dass es für komplizierte Indexmengen I nicht möglich ist, eine solche Auswahlfunktion zu konstruieren. Das Auswahlaxiom hat mehrere äquivalente Formulierungen; manche erscheinen intuitiv fast trivial, andere sehr unnatürlich. </bemerkung>

**<definition> Definition 8.** Sei f: X \rightarrow Y eine Abbildung sowie A \subset X, B \subset Y Teilmengen. Wir definieren

(1) das Bild von A unter f: f(A) := \{ y \in Y | es existiert ein a \in A mit f(a) = y \},

(2) das Urbild von B unter f: f^{-1}(B) := \{ x \in X | es ex. ein b \in B mit f(x) = b \}.

Für Bilder und Urbilder von Abbildungen gelten gewisse Rechenregeln, die wir hier zusammenstellen. Dabei ist bemerkenswert, dass sich das Urbild hierbei viel „besser“ verhält als das Bild.</definition>

**<lemma> Lemma 9.** Ist f: X \rightarrow Y eine Abbildung, A\_1, A\_2 \subset X,

B\_1, B\_2 \subset Y, so gilt:

(1) f(A\_1 \cup A\_2) = f(A\_1) \cup f(A\_2),

(2) f(A\_1 \cap A\_2) \subset f(A\_1) \cap f(A\_2),

(3) f(A\_1 – A\_2) \supset f(A\_1) – f(A\_2),

(4) f^{-1}(B\_1 \cup B\_2) = f^{-1}(B\_1) \cup f^{-1}(B\_2),

(5) f^{-1}(B\_1 \cap B\_2) = f^{-1}(B\_1) \cap f^{-1}(B\_2),

(6) f^{-1}(B\_1 – B\_2) = f^{-1}(B\_1) – f^{-1}(B\_2). </lemma>

**<beweis>** Wir betrachten zunächst die Eigenschaften des Bildes.

(1) Sind C, D Mengen mit C \subset D, dann folgt f(C) \subset f(D). Damit impliziert

A\_i \subset A\_1 \cup A\_2 (i = 1, 2) sofort f(A\_i) \subset f(A\_1 \cup A\_2). Wenn dies aber für i = 1 und i= 2 gilt, dann ist auch f(A\_1) \cup f(A\_2) \subset f(A\_1 \cup A\_2) und die Inklusion \supset ist bewiesen. Ist umgekehrt a \in A\_1 \cup A\_2, also

a \in A\_1 oder a \in A\_2, dann muss f(a) in f(A\_1) oder f(A\_2) liegen. Dies beweist die andere Inklusion \subset.

(2) Die eine Inklusion folgt wie bei (1) aus A\_1 \cap A\_2 \subset A\_i, i = 1, 2. Gegenbeispiele, die belegen, dass die andere Inklusion nicht gilt, sind leicht zu konstruieren: Sind etwa A\_1, A\_2 disjunkte Mengen und f die konstante Abbildung, die alle Elemente auf das gleiche Element abbildet, dann wäre A\_1 \cap A\_2 = \{ \}, also auch f(A\_1 \cap A\_2) = \{ \}, aber andererseits f(A\_1) = f(A\_2).

(3) Ein Element y liegt in f(A\_1) – f(A\_2), wenn es in f(A\_1), aber nicht in f(A\_2) liegt. Insbesondere existiert also ein x \in A\_1 mit f(x) = y, und dieses x liegt nicht in A\_2. Damit ist aber x \in A\_1 – A\_2 und deswegen y = f(x) \in f(A\_1 – A\_2). Die Konstruktion eines Gegenbeispiels für die andere Inklusion überlassen wir dem Leser.

</Seite 10><Seite 11>

(4) Wir formulieren den Beweis etwas unschön, aber dafür einprägsam, in Kurzschreibweise.

x \in f^{-1}(B\_1) \cup f^{-1}(B\_2)

\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B\_1) oder x \in f^{-1}(B\_2)

\Leftrightarrow \exists b\_1 \in B\_1 mit f(x) = b\_1 oder

oder \exists b\_2 \in B\_2 mit f(x) = b\_2

\Leftrightarrow \exists b \in B\_1 \cup B\_2 mit f(x) = b

\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B\_1 \cup B\_2).

Die Beweise von (5) und (6) werden dem Leser überlassen (vgl. Aufgabe 1.12).

</beweis>

**Definition 9.** Wir kommen nun zu einigen eminent wichtigen Abbildungseigenschaften. Sei dazu f eine beliebige Abbildung von X nach Y.

(1) Die Abbildung f: X \rightarrow Y heißt injektiv oder eine Injektion, falls für jedes Y \in Y die Menge f^{-1}(\{ y \}) höchstens ein Element hat („jedes Element hat höchstens ein Urbild“).

(2) Die Abbildung f: X \rightarrow Y heißt surjektiv *(Fußnote 4:* Da das Wort aus dem Französischen übernommen wurde, spricht man es für gewöhnlich im Deutschen „sürjektiv“ aus.) oder eine Surjektion, falls für jedes y \in Y die Menge f^{-1}(\{ y\}) mindestens ein Element hat („jedes Element hat mindestens ein Urbild“). Dies ist äquivalent zu f(X) = Y;

(3) Die Abbildung X \rightarrow Y heißt bijektiv oder eine Bijektion, falls sie

gleichzeitig injektiv und surjektiv ist (jedes Element hat genau ein Urbild“).

**<beispiel> Beispiel 11.** Die Abbildung f: \N \rightarrow \N, f(n) = n + 1, ist injektiv, aber nicht surjektiv, weil 0 \in \N – f(\N). Die identische Abbildung Id\_X einer Menge in sich ist immer bijektiv. </beispiel>

**<definition> Definition 10.** Für Abbildungen f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z liefert x \mapsto g(f(x)) eine neue Abbildung X \rightarrow Z, die als Komposition oder Verknüpfung von f und g bezeichnet wird und g \circ f: X \rightarrow Z geschrieben wird. </definition>

*<abbildung> (Beschreibung der beiden Zeichnungen:*

*linke Zeichnung: Die Buchstaben X, Z und Y sind in Form eines gleichseitigen Dreiecks angeordnet: Z rechts neben X verbunden durch einen Pfeil von X nach Z mit der Beschriftung g \circ f, Y unterhalb dieses Pfeils. Der Pfeil von X nach Y ist mit f, der Pfeil von Y nach Z mit g bezeichnet.*

*rechte Zeichnung: Die Buchstaben X, \tilde{Y}, (sprich: „Y Schlange“), Z und Y sind in Form eines Quadrates angeordnet. Von X zeigt ein Pfeil mit der Beschriftung f nach rechts zu Y, von dort ein Pfeil „g“ nach unten zu Z, von X ein Pfeil „h“ nach unten zu \tilde{Y}, schließlich ein Pfeil „k“ von \tilde{Y} zu Z.)*

*</abbildung>*

Die Verknüpfung der Abbildungen f und g stellt man gerne durch das linke Dreiecksdiagramm dar. Ganz allgemein sagt man, das das rechte Diagramm kommutativ ist, falls g \circ f = k \circ h gilt. Wir zeigen nun, dass für die Verknüpfung von Abbildungen das Assoziativgesetz gilt:

**<lemma> Lemma 10.** Sind drei Abbildungen f\_i: X\_i \rightarrow X\_{i+1}, i = 1, 2, 3, gegeben, so gilt stets:

f\_3 \circ (f\_2 \circ f\_1) = (f\_3 \circ f\_2) \circ f\_1. </lemma>

**<beweis>**Wir zeigen, dass rechts und links dieselbe Vorschrift für ein beliebiges

x \in X\_1 steht. Auf der linken Seite steht

(f\_3 \circ (f\_2 \circ f\_1))(x) = f\_3((f\_2 \circ f\_1)(x)) = f\_3(f\_2(f\_1(x))),

und auf der rechten Seite steht

((f\_3 \circ f\_2) \circ f\_1)(x) = (f\_3 \circ f\_2)(f\_1(x)) = f\_3(f\_2(f\_1(x))).

</beweis>

**<lemma> Lemma 11.** Zu jeder surjektiven Abbildung f: X \rightarrow Y existiert mindestens eine injektive Abbildung g: Y \rightarrow X mit der Eigenschaft f \circ g = Id\_Y. </lemma>

**<beweis>**Dies ist eine direkte Folge des Auswahlaxioms: Wir betrachten für jedes

y \in Y die Menge X\_y := f^{-1}(\{ y \}) \subset X. Weil f surjektiv ist, ist X\_y für kein

y \in Y leer. Betrachtet man Y als Indexmenge, so besagt das Auswahlaxiom, dass es eine Auswahlfunktion g: Y \rightarrow \cup\_{y \in Y} X\_y = X gibt mit

g(y) \in X\_y, d.h. f(g(y)) = y.

</beweis>

</Seite 11><Seite 12>

Zu dieser Aussage gilt in gewissem Sinne auch eine Umkehrung. Weil hier keine Abbildung konstruiert werden muss, sondern nur zwei Abbildungseigenschaften überprüft werden müssen, benötigt man hierfür nicht das Auswahlaxiom.

**<lemma> Lemma 12.** Sind f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X zwei Abbildungen, die f \circ g = Id\_Y erfüllen, dann ist f surjektiv und g injektiv. </lemma>

**<beweis>**Nach Voraussetzung gilt f(g(y)) = y für alle y \in Y, also ist x := g(y) ein Element von X, welches unter f auf y abgebildet wird. Damit ist f surjektiv. Gilt auf der anderen Seite g(y\_1) = g(y\_2) für zwei Elemente y\_1, y\_2 \in Y, so ergibt die Anwendung von f zusammen mit der Voraussetzung:

y\_1 = f(g(y\_1)) = f(g(y\_2)) = y\_2, g ist daher injektiv.

</beweis>

Der folgende Satz ist von zentraler Bedeutung.

**<satz> Satz 1** (Umkehrung einer bijektiven Abbildung)**.** Ist f: X \rightarrow Y eine bijektive Abbildung, so existiert genau eine Abbildung g: Y \rightarrow X mit den Eigenschaften f \circ g = Id\_Y, g \circ f = Id\_X, genannt die Umkehrung oder Umkehrabbildung von f, geschrieben f^{-1} := g. Überdies ist f^{-1} ebenfalls bijektiv und f ist die Umkehrabbildung von f^{-1}. </satz>

**<beweis>**Weil f insbesondere surjektiv ist, existiert nach Lemma 11 mindestens eine Abbildung g: Y \rightarrow X mit f \circ g = Id\_Y, und diese ist nach Lemma 12 immer injektiv. Wir betrachten nun A = g(Y) als Teilmenge von X. Um die Surjektivität von g zu beweisen, genügt es, A = X zu zeigen. Für jede echte Teilmenge A’ \subset X (d.h. A’ \not= X) kann nicht f(A’) = X sein, weil f injektiv ist (anderenfalls gäbe es ein x\_0 \in X – A’, und für y\_0 := f(x\_0) gäbe es auch ein a\_0 \in A’ mit f(a\_0) = y\_0). Aber nach Konstruktion von g ist f(A) = f \circ g(Y) = Y, also ist A = g(Y) keine echte Teilmenge von X, sondern ganz X. Damit ist g surjektiv, also insgesamt bijektiv. Weil g also bijektiv ist, kann man dieselbe Überlegung auf g statt f anwenden und erhält somit die Existenz einer bijektiven Abbildung h: X \rightarrow Y mit g \circ h = Id\_X. Wir verknüpfen diese Gleichung von links mit f:

f = f \circ Id\_X = f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h = Id\_Y \circ h = h.

Damit ist h = f und es existiert insbesondere eine Abbildung mit den im Satz genannten Eigenschaften.

Wir zeigen nun die Eindeutigkeit von g. Sei \tilde{g}: Y \rightarrow X irgendeine weitere Abbildung mit f \circ \tilde{g} = Id\_Y. Dann ist

\tilde{g} = Id\_X \circ \tilde{g} = (g \circ f) \circ \tilde{g} = g \circ (f \circ \tilde{g}) =

= g \circ Id\_Y = g,

d.h. die Abbildung g ist eindeutig.

Wir wenden uns noch kurz der Behauptung über die Umkehrung \tilde{f} von f^{-1} zu. Wir wissen bereits, dass \tilde{f} bijektiv sein muss, nach dem bisher bewiesenen Teil des Satzes hat also \tilde{f} eine eindeutige Unkehrabbildung, Aber f hat offenbar alle Eigenschaften, die die Umkehrabbildung haben soll, also ist f = \tilde{f}.

</beweis>

**<bemerkung> Bemerkung 5.** In der Analysis werden Abbildungen traditionell meist Funktionen genannt, es gibt aber keine klare Abgrenzung der Begriffe. Eine Funktion ist also im Allgemeinen eine Abbildung, die auf einer Teilmenge von \R (oder \R^n) definiert ist. So mancher Mathematiker verwendet die beiden Begriffe aber auch völlig synonym.

</bemerkung>

**<beispiel> Beispiel 12** (Hilberts Hotel)**.** Folgendes Beispiel soll auf David Hilbert zurückgehen.

(*Fußnote 5:* David Hilbert, geb. 1862 in Königsberg, gest. 1943 in Göttingen. Einer der bedeutendsten Mathematiker der Neuzeit. Studium in Königsberg und Heidelberg, eng befreundet mit seinem Kommilitonen Hermann Minkowski. Ab 1895 Professor in Göttingen. Wichtige Beiträge zur Algebra (Hilbertscher Nullstellensatz), allgemeinen Relativitätstheorie (Hilbertfunktional), Funktionalanalysis (Hilbertraum), Theorie der Differential- und Integralgleichungen, Elementargeometrie (axiomatische Begründung in seinem Werk ‚Grundlagen der Geometrie’). Seine Vorschläge zu den Grundlagen der Mathematik (‚Hilbertprogramm’) führten zu einer kritischen Analyse der Begriffsdefinitionen der Mathematik und des mathematischen Beweises. Hilberts programmatische Rede auf dem internationalen Mathematikerkongress in Paris im Jahre 1900, in der er eine Liste von 23 mathematischen Problemen vorstellte, beeinflusst die mathematische Forschung bis heute. Er war auch der wichtigste Unterstützer und Förderer der Mathematikerin Emmy Noether. *Ende der Fußnote 5*)

In einem Hotel mit endlich vielen Zimmern können keine Gäste mehr aufgenommen werden, sobald alle

</Seite 12><Seite 13>

Zimmer belegt sind. Ist G die Menge aller Gäste, Z die Menge aller Zimmer, so besagt diese banale Tatsache einfach, dass es keine injektive Abbildung

G \rightarrow Z geben kann, wenn G mehr Elemente als Z hat.

Stellen wir uns nun ein Hotel mit abzählbar unendlich vielen Zimmern vor (durchnummeriert bei 1 beginnend). Man könnte annehmen, dass dasselbe Problem auch hier auftreten würde: Wenn alle Zimmer belegt sind, kann kein weiterer Gast aufgenommen werden.

Es gibt jedoch einen Weg, Platz für einen weiteren Gast zu machen, obwohl alle Zimmer belegt sind. Der Gast von Zimmer 1 geht in Zimmer 2, der von Zimmer 2 geht in Zimmer 3, der Zimmer 3 nach Zimmer 4 usw. Damit wird Zimmer 1 frei für den neuen Gast. Da die Anzahl der Zimmer abzählbar unendlich ist, gibt es keinen „letzten“ Gast, der nicht in ein weiteres Zimmer umziehen könnte. Wiederholt man das, erhält man Platz für eine beliebige, aber endliche Zahl neuer Gäste.

Es ist sogar möglich, Platz für abzählbar unendlich viele neue Gäste zu machen: Der Gast von Zimmer 1 geht wie vorher in Zimmer 2, der Gast von Zimmer 2 aber in Zimmer 4, der von Zimmer 3 in Zimmer 6 usw. Damit werden alle Zimmer mit ungerader Nummer frei für die abzählbar unendlich vielen Neuankömmlinge.

</beispiel>

## 1.5. Relationen

Relationen sind die mathematische Verallgemeinerung von Paarungen.

**<definition> Definition 11.** Ist X eine Menge, so heißt eine Teilmenge R \subset X x X eine Relation. Damit soll zum Ausdruck gebracht werden, dass zwischen gewissen Paaren von Elementen aus X eine besondere Beziehung besteht. Statt

(x, y) \in R schreibt man meist ein Symbol zwischen x und y, etwa xRy,

x \stackrel{R}{\sim} y.

</definition>

Von besonderer Bedeutung sind die Äquivalenzrelationen und die Ordnungsrelationen, die wir näher besprechen wollen und die in gewisser Weise zueinander entgegengesetzt sind. Um dies besser hervorzuheben, geben wir beide Definitionen in einer an.

**<definition> Definition 12** (Ordnungs- und Äquivalenzrelationen)**.** Eine Relation R auf X heißt Ordnungs- oder Äquivalenzrelation, falls sie die beiden folgenden Eigenschaften hat

(OÄ1) xRx (Reflexivität)

(OÄ2) (xRy und yRz) \Rightarrow xRz (Transitivität)

und ferner noch gilt

(O3) für Ordnungsrelationen: Aus xRy und yRx folgt x = y (Antisymmetrie)

(Ä3) für Äquivalenzrelationen: Aus xRy folgt yRx (Symmetrie)

</definition>

**<beispiel> Beispiel 13** (Ordnungsrelationen)**.** Für Ordnungsrelationen verwendet man meist das Symbol \le (oder etwas ähnliches, etwa \prec). Natürlich ist die uns wohlbekannte Ordnung auf \R in diesem Sinne eine Ordnungsrelation.

Ist auf M eine Ordnungsrelation definiert, so heißt M geordnet. Wir schreiben x < y, falls x \le y und x \not= y. Zwei Elemente x, y \in M heißen vergleichbar, wenn x \le y oder y \le x gilt. Ist N eine Teilmenge von M, so heißt ein Element s \in M eine obere (bzw. untere) Schranke von N, falls für alle n \in N gilt n \le s (bzw. s \le n). Ein Element t \in M heißt Supremum (bzw. Infimum) von N, falls es die kleinste obere (bzw. größte untere) Schranke von N ist.

</beispiel>

Auf \R mit der üblichen Ordnungsrelation sind zwei beliebige Elemente immer vergleichbar. Aber es gibt noch viel mehr Beispiele:

</Seite13><Seite 14>

**<beispiel> Beispiel 14.** Auf M = \N definieren wir eine Relation \le durch

k \le l \Leftrightarrow k|l (k ist Teiler von l).

Da weder 3|5 noch 5|3 gilt, sind zwei Zahlen bzgl. dieser Ordnung nicht immer vergleichbar. In die elementaren Zahlentheorie gehört die Tatsache, dass jede endliche nichtleere Teilmenge von \N bzgl. dieser Ordnungsrelation ein Supremum und ein Infimum besitzt, genannt „kleinstes gemeinsames Vielfaches“ und „größter gemeinsamer Teiler“. </beispiel>

**<beispiel> Beispiel 15.** Ist M beliebig, so trägt jede Teilmenge \{ \} \not= N \subset \wp(M) eine Ordnung, nämlich die Inklusion \subset. Auch hier sind zwei beliebige Elemente A, B \in N nicht notwendig vergleichbar, da es Mengen A, B \subset M gibt, für die weder A \subset B noch B \subset A gilt.

</beispiel>

**<beispiel> Beispiel 16** (Äquivalenzrelationen)**.** Für Äquivalenzrelationen werden wir in Zukunft das Symbol \sim verwenden. Sind x \sim y, dann heißen x und y äquivalent. Die Kongruenz und die Ähnlichkeit sind Äquivalenzrelationen auf der Menge der Dreiecke in der Ebene.

Ist X die Menge aller in Deutschland lebenden Menschen, so ist

„x \sim y \Leftrightarrow x und y wohnen in der gleichen Stadt“ eine Äquivalenzrelation. Dagegen definiert

„x \sim y \Leftrightarrow x und y sind befreundet“ keine Äquivalenzrelation, denn wenn x mit y und y mit z befreundet ist, muss noch lange nicht x mit z befreundet sein.

</beispiel>

**<satz> Satz 2.** Eine Äquivalenzrelation auf der Menge X bewirkt eine Zerlegung auf X in disjunkte nichtleere Teilmengen derart, dass je zwei Elemente ein und derselben Menge äquivalent, je zwei Elemente verschiedener Teilmengen aber nicht äquivalent sind. </satz>

**<beweis>**Für jedes feste x\_0 \in X betrachten wir alle Elemente, die zu x\_0 äquivalent sind,

[x\_0] = \{ x \in X : x \sim x\_0 \}.

Man nennt [x\_0] die Äquivalenzklasse von x\_0, jedes Element von [x\_0] ist ein Repräsentant dieser Äquivalenzklasse. Die Äquivalenzklasse [x\_0] ist nicht leer, denn wegen (1) enthält sie x\_0 und jedes Element von X liegt in mindestens einer Äquivalenzklasse, nämlich seiner eigenen. Wir zeigen nun, dass zwei Äquivalenzklassen [x\_1], [x\_2] entweder disjunkt oder gleich sind. Gibt es nämlich ein x\_0 \in X mit x\_0 \in [x\_1] \cap [x\_2] und ist x ein weiteres Element von [x\_1], so gilt simultan

x \sim x\_1, x\_0 \sim x\_1, x\_0 \sim x\_2.

Die Eigenschaften (2) und (3) von Äquivalenzrelationen implizieren dann x \sim x\_2, d.h. x \in [x\_2]. Also ist [x\_1] \subset [x\_2]. Aus Symmetriegründen ist dann auch [x\_2] \subset [x\_1], so dass die beiden Äquivalenzklassen insgesamt gleich sind. </beweis>

In unserem ersten Beispiel sind die Äquivalenzklassen einfach die Mengen von Personen, die alle in der gleichen Stadt wohnen (doppelte Wohnsitze sind hier der Einfachheit halber nicht zugelassen), und die Menge der Äquivalenzklassen kann mit der Menge aller Städte identifiziert werden. Für die Menge aller Äquivalenzklassen verwendet man oft die Bezeichnung M / R oder M / \sim.

## 1.6. Exkurs: Der Begriff der Stetigkeit in der Analysis

Dieser Abschnitt ist nicht Teil der Vorlesung, sondern analysiert im Lichte der hier behandelten logischen Quantoren die Definition der Stetigkeit. Diese ist ein zentraler Begriff der Analysis, deren Verständnis im Allgemeinen eine gewisse Zeit in Anspruch nimmt …. Wir empfehlen daher, diesen Abschnitt zu gegebener Zeit (wieder) zu lesen. Um nicht auf zu viele unbekannte Begriffe vorgreifen zu müssen, geben wir die Definition bewusst nicht in größtmöglicher Allgemeinheit wider.

**<definition> Definition 13.** Sei f: I \rightarrow \R eine Funktion auf einem beliebigen Intervall I. Die Funktion f wird in x im Inneren von I stetig genannt, falls

\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0: |f(x + h) – f(x)| < \epsilon \forall h mit |h| < \delta. </definition>

</Seite 14><Seite 15>

Es gibt diverse Möglichkeiten, diese Bedingungen umzuformulieren. Sie ist etwa äquivalent zu

\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0: f([x - \delta, x + \delta]) \subset

\subset [f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon]

oder auch

\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0: |f(y) – f(x)| < \epsilon \forall y mit

mit |x – y| < \delta.

Man findet also zu jedem \epsilon ein passendes \delta, das sowohl von dem zuvor gewählten \epsilon als auch von dem Punkt x abhängt. Ist f auch noch in einem anderen Punkt x’ stetig, so wird man für das gleiche \epsilon im Allgemeinen ein anderes \delta wählen müssen.

*<abbildung>*

*Beschreibung: Im linken Koordinatensystem (1. Quadrant) ist ein durchgehend gezeichnetes Teilstück eines Graphen zu sehen. Die Koordinaten des Punktes*

*(x, f(x)) sind als Parallelen zu den Achsen eingezeichnet. Die Parallele zur x-Achse durch y auf der y-Achse ist ober- und unterhalb jeweils mit einem Streifen der Breite*

*\epsilon versehen, dessen jeweils rechte Grenze durch Punkte auf dem Graphen gegeben ist. Von einem Teil dieser Punkte ausgehend sind Parallelen zur y-Achse eingezeichnet, die auf der x-Achse enden: So entstehen jeweils links und rechts von der durch x auf der x-Achse gehenden Parallelen zur y-Achse Streifen der Breite \delta.*

*Im rechten Koordinatensystem sind zwei voneinander getrennte Teilstücke eines Graphen zu sehen, die in sich wieder durchgehend gezeichnet sind: Das zweite Teilstück beginnt im Punkt (x, f(x)), der senkrecht über dem Punkt liegt, dem sich das erste Teilstück nähert. Zusätzlich zu den beiden Streifen der Breite \epsilon parallel zur x- Achse durch y und den beiden Streifen der Breite \delta parallel zur y-Achse durch x ist ein weiterer Streifen parallel zur x-Achse eingezeichnet und zwar durch den Punkt, dem sich der Graph in seinem ersten Teilstück nähert und der unterhalb des Punktes liegt, mit dem das zweite Teilstück des Graphen beginnt.*

*</abbildung>*

Wir stellen die Bedingung der Stetigkeit in einem Punkt graphisch dar: Es ist genau dann f in x stetig, falls es zu jedem \epsilon-Intervall um y = f(x) ein \delta-Intervall um x gibt derart, dass ihr Bild unter f vollständig in dem zuvor gewählten \epsilon-Intervall um y liegt. Im linken Bild ist das in x \in I tatsächlich der Fall, im rechten nicht: Wie klein man das \delta-Intervall um x auch macht, ein Teil ihres Bildes liegt nicht in dem eingezeichneten \epsilon-Intervall um y.

Nach Lemma 8 können wir nun die Bedingung formulieren, wann f im Punkt x unstetig ist: Dies ist genau dann der Fall, wenn

\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0: |f(x + h) – f(x)| > \epsilon für ein h mit |h| < \delta,

oder äquivalent

\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0: f([x - \delta, x + \delta]) \non subset

\non subset [f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon].

In der zweiten Formulierung erkennt man leichter, dass nach den Quantoren nur die Negation der vorherigen Eigenschaft steht (ist Teilmenge bzw. eben nicht).

Ist nun f nicht nur in einem Punkt x \in I stetig, sondern auf ganz I, so heißt dies

\forall x \in I \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0:

|f(x + h) – f(x)| < \epsilon \forall h mit |h| < \delta.

Die Reihenfolge der beiden ersten Quantoren kann verändert werden, weil diese gleich sind, d.h. f ist genau dann auf I stetig, falls

\forall \epsilon > 0 \forall x \in I \exists \delta > 0:

|f(x + h) – f(x)| < \epsilon \forall h mit |h| < \delta.

An dieser Stelle ist die logische Abhängigkeit wie folgt: Man wählt ein beliebiges \epsilon > 0, ein beliebiges x \in I, und dann existiert ein von \epsilon und x abhängiges \delta mit |f(x + h) - f(x)| < \epsilon \forall h mit |h| < \delta. Invertiert man die Reihenfolge des zweiten und dritten Quantors, dann erhält man eine stärkere Bedingung: Gilt

(\ast) \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in I:

|f(x + h) – f(x)| < \epsilon \forall h mit |h| < \delta,

so wird die Existenz eines \deltas gefordert, dass bei fixiertem \epsilon für alle x \in I passt. Das \delta hängt also nicht mehr von x ab. Erfüllt f auf I die Bedingung (\ast), so heißt f auf I gleichmäßig stetig.

**<bemerkung> Bemerkung 6.** Die Quantoren usw. im Begriff der Stetigkeit sind wichtig. Die beiden folgenden Punkte sind dagegen irrelevant und werden deswegen gerne mal ohne lange Erläuterungen verwendet:

</Seite 15><Seite 16>

(1) Man kann sich in Stetigkeitsbeweisen immer auf \epsilon < 1 beschränken, denn

wenn die Stetigkeitsbedingung dann für ein gefundenes \delta gilt, ist es ungefährlich, das \epsilon-Intervall wieder zu vergrößern – ein \delta, das zu einem gewissen \epsilon passt, passt auch für jedes weitere \epsilon’ mit

\epsilon’ > \epsilon. Für \epsilon < 1 gilt z.B. \epsilon^2 < \epsilon, was in Abschätzungen nützlich sein kann.

(2) Es ist ebenso unerheblich, ob man die strikte Ungleichung fordert oder den Gleichheitsfall zulässt, also ob man |h| < \delta oder |h| \le \delta sowie

|f(x + h) – f(x)| < \epsilon oder \le \epsilon fordert. Aus der Eigenschaft mit < folgt die mit \le, und umgekehrt kann man durch nachträgliches Verkleinern von \delta noch erreichen, dass nicht nur |f(x + h) – f(x)| \le \epsilon gilt, sondern auch

|f(x + h) – f(x)| < \epsilon. Für die Stetigkeit ist dies nicht von Belang, den Gleichheitsfall zuzulassen ist aber oft bequemer.

</bemerkung>

**<beispiel> Beispiel 17.** Wir beweisen anhand der Definition, dass die Funktion

f: \R \rightarrow \R, f(x) = x^2, überall stetig ist. Wir fixieren x \_0 \in \R und wählen ein beliebiges \epsilon > 0. Gesucht ist ein \delta > 0 mit |x^2 – x\_0^2| < \epsilon für alle x mit |x – x\_0| < \delta.

Die uns interessierende Größe lässt sich umschreiben zu

|f(x) – f(x\_0)| = |x^2 – x\_0^2| = |(x + x\_0)(x – x\_0)|,

und wenn |x – x\_0| < \delta, kann man dies wiederum abschätzen durch

|f(x) – f(x\_0)| < \delta\*|(x + x\_0)|.

Leider ist zunächst wenig über x + x\_0 bekannt. Aber wenn x nahe an x\_0 liegt (was genau durch die Forderung |x – x\_0| < \delta zum Ausdruck kommt), dann sollte man sich z.B. auf solche x beschränken können, die etwa |x| < 2\*|x\_0| erfüllen. Dann wäre

|f(x) – f(x\_0)| < \delta\*|(x + x\_0)| \le \delta\*(|x| + |x\_0|) < 3\*\delta\*|x\_0|.

Dies muss nun kleiner als \epsilon sein. Damit dies der Fall ist, wählen wir also

\delta :=\min(2\*|x\_0|, \epsilon / (3\*|x\_0|))

und schreiben den Beweis noch mal sauber auf: Zu gegebenem x\_0 \in R und \epsilon > 0 sei \delta wie eben definiert. Dann gilt für jedes x mit der Eigenschaft

|x – x\_0| < \delta:

|f(x) – f(x\_0)| = |(x + x\_0)(x – x\_0)| < \delta\*|(x + x\_0)| \le \delta\*(|x| + |x\_0|)

\le 3\*\delta\*|x\_0| \le \epsilon,

was zu beweisen war. Damit ist die Funktion f(x) = x^2 auf ganz \R stetig. Man kann nun noch die Frage untersuchen, ob sie auf \R gleichmäßig stetig ist. Das gefundene \delta ist dafür nicht geeignet, denn es hängt wesentlich von x\_0 ab. Es könnte aber sein, dass ein besseres, von |x\_0| unabhängiges \delta gefunden werden kann, wir hätten dann gewissermaßen nur ungeschickt gerechnet. Es ist instruktiv, eine Weile zu versuchen, ein x\_0-unabhängiges \delta zu finden. Man wird feststellen, dass dies nicht geht. In der Tat, betrachte z.B. \epsilon = 1, und setze voraus, dass ein universelles \delta existiert mit der Eigenschaft |f(x) – f(x\_0)| < \epsilon für alle x mit |x – x\_0| \le \delta. Aber dann ist

|f(x\_0 + \delta) – f(x\_0)| = \delta^2 + 2\*\delta\*x\_0,

und für x\_0 = 1 / \delta \in \R wird dies größer als 2, also war das \delta doch nicht für alle x\_0 geeignet und die Funktion ist nicht auf \R gleichmäßig stetig. Auf einem kompakten Intervall [a, b] ist sie es aber (dies ist der Inhalt des Satzes von Heine), oder man wählt einfach

\delta = \min\_{x \in [a, b]} (2\*|x|, \epsilon / (3\*|x|)).

Dieses \delta ist dann nicht mehr von einem Punkt x\_0 auf [a, b] abhängig und erfüllt die gewünschte Abschätzung.

</beispiel>

</Seite 16><Seite 17>

## Aufgaben

**Aufgabe 1.1.** Zeigen Sie an einem Beispiel, dass im Allgemeinen

(A \cup B) \cap C \not= A \cup (B \cap C).

**Aufgabe 1.2.** Seien A und B beliebige Mengen. Welche logische Beziehung besteht zwischen folgenden Aussagen (sind sie unabhängig, gibt es eine Aussage, die eine andere impliziert, sind sie äquivalent, etc.)?

a) B \subset A,

b) A \cup B = A,

c) A \cap B = B.

**Aufgabe 1.3.** Es seien \Delta\_1 und \Delta\_2 zwei Dreiecke in der Ebene. Welche logische Beziehung besteht zwischen folgenden Aussagen (sind sie unabhängig, gibt es eine Aussage, die eine andere impliziert, sind sie äquivalent, etc.)?

(1) \Delta\_1 und \Delta\_2 sind kongruent,

(2) \Delta\_1 und \Delta\_2 sind ähnlich,

(3) \Delta\_1 und \Delta\_2 haben den gleichen Flächeninhalt,

(4) \Delta\_1 und \Delta\_2 haben zwei übereinstimmende Winkel,

(5) \Delta\_1 und \Delta\_2 sind rechtwinklig,

(6) \Delta\_1 und \Delta\_2 sind gleichseitig.

**Aufgabe 1.4.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr, wenn p und q wahr sind?

(1) p \wedge \neg q

(2) \neg p \wedge q

(3) \neg (p \wedge q)

(4) p \Rightarrow q

(5) p \vee \neg q

(6) \neg (\neg p \wedge q)

(7) (\neg p \vee \neg q) \wedge \neg p

(8) \neg(p \Rightarrow q)

(9) p \Leftrightarrow q

**Aufgabe 1.5.** Man beweise für beliebige Mengen A, B, C:

(1) A \cap B = A – (A – B)

(2) A \cup (B – A) = A \cup B

(3) A – (A \cap B) = A – B

(4) A \cap (B – C) = (A \cap B) – C

**Aufgabe 1.6.** Man definiert die symmetrische Differenz A \Delta B zweier Mengen

A, B als A \Delta B := (A – B) \cup (B – A).

Man beweise:

(1) A \Delta B = B \Delta A,

(2) A \Delta A = \{ \}, A \Delta \{ \} = A,

(3) A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C,

(4) A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C),

(5) A \cup B = A \Delta B \Delta (A \cap B),

(6) A – B = A \Delta (A \cap B).

**Aufgabe 1.7.** Sei X eine Menge, A, B, C beliebige Teilmengen von X. Man sagt, dass die (abstrakten) Operationen + und \cdot (*Punkt in der Mitte der Zeilenhöhe)* der Menge X die Struktur eines Mengenrings geben, falls immer gilt:

(1) A + B = B + A und A \cdot B = B \cdot A,

(2) A + (B + C) = (A + B) + C und A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C,

(3) es existiert eine Menge O mit A + O = A,

(4) es existiert zu beliebigem A, B eine Menge C derart, dass A = B + C,

(5) A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.

</Seite 17><Seite 18>

Man zeige, dass X mit + = \cup, \cdot = \cap kein Mengenring ist, wohl aber mit

+ = \Delta (vgl. vorherige Aufgabe) und \cdot = \cap.

**Aufgabe 1.8.** Sei I eine beliebige Indexmenge, F\_i, G\_i für i \in I sowie X beliebige Mengen. Man beweise:

(1) \bigcap\_{i \in I} (F\_i \cap G\_i) = \bigcap\_{i \in I} F\_i \cap \bigcap\_{i \in I} G\_i

(2) \bigcup\_{i \in I} (F\_i \cup G\_i) = \bigcup\_{i \in I} F\_i \cup \bigcup\_{i \in I} G\_i

(3) \bigcap\_{i \in I} F\_i \cup \bigcap\_{i \in I} G\_i =

= \bigcap\_{i, j \in I} (F\_i \cup G\_j) subset \bigcap\_{i \in I} (F\_i \cup G\_i)

(4) \bigcup\_{i \in I} (F\_i \cap G\_i) \subset \bigcup\_{i,j \in I} (F\_i \cap G\_j) =

= \bigcup\_{i \in I} F\_i \cap \bigcup\_{i \in I} G\_i

(5) \bigcap\_{i \in I} (X \cup F\_i) = X \cup \bigcap\_{i \in I} F\_i,

\bigcup\_{i \in I} (X \cap F\_i) = X \cap \bigcup\_{i \in I} F\_i

Man beweise weiterhin, dass in (3) und (4) das Inklusionszeichen nicht durch ein Gleichheitszeichen ersetzt werden kann.

**Aufgaben 1.9.** Man zeige, dass für Mengen A\_n, B\_n (n \in \N) mit der Eigenschaft

A\_1 \supset A\_2 \supset A\_3 … \supset A\_n \supset … und

B\_1 \supset B\_2 \supset B\_3 … \supset B\_n \supset … gilt:

\bigcap\_{i=1} ^\infty (A\_n \cup B\_n) =

= \bigcap\_{i=1}^\infty A\_n \cup \bigcap\_{i=1}^\infty B\_n

**Aufgabe 1.10.** Sei f: \R \rightarrow \R eine beliebige Abbildung. Man formuliere die folgenden Aussagen sowie ihre Negation mit Hilfe von Quantoren:

(1) f ist die identische Abbildung.

(2) f hat mindestens einen Fixpunkt.

(3) f ist die Null-Abbildung.

(4) Die Gleichung f(x) = 0 hat genau eine Lösung.

(5) Die Gleichung f(x) = 0 hat mindestens eine Lösung.

**Aufgabe 1.11.** Man beweise folgende Eigenschaften für das kartesische Produkt

(A, B, … beliebige Mengen):

(1) Ist A’ \subset A und B’ \subset B, dann ist A’ x B’ \subset A x B.

(2) Es ist A x B = \{ \} genau dann, falls A = \{ \} oder B = \{ \} ist.

(3) A x (B \cup C) = (A x B) \cup (A x C).

(4) A x (B \cap C) = (A x B) \cap (A x C).

(5) Ist C \not= \{ \} und A x C = B x C, dann folgt A = B.

**Aufgabe 1.12.** Man beweise die Rechenregeln (5) und (6) aus Lemma 9 für das Urbild von Mengen.

**Aufgabe 1.13.** Sind f: X \rightarrow V und g: Y \rightarrow W Abbildungen, so definiert man die Produktabbildung h: X x Y \rightarrow V x W durch

h(x, y) := (f(x), g(y)).

Man zeige für M \subset V und N \subset W:

h^{-1} (M x N) = f^{-1} (M) x g^{-1} (N).

</Seite 18><Seite 19>

**Aufgabe 1.14.** Eine Abbildung f: X \rightarrow X heißt Involution oder involutiv, falls

f \circ f = Id\_X gilt. Man beweise, dass jede Involution bijektiv ist.

**Aufgabe 1.15.** Man betrachte Abbildungen f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C und

h = g \circ f. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? (Beweis oder Gegenbeispiel)

(1) Sind f und g beide injektiv (surjektiv), so ist auch h injektiv (surjektiv).

(2) Ist h injektiv (surjektiv), so auch f.

(3) Ist h injektiv (sujektiv), so auch g.

(4) Ist h bijektiv, so sind es auch f und g.

(5) Sind f und g Involutionen, so ist auch h eine Involution.

**Aufgabe 1.16.** Ist f: X \rightarrow Y eine Bijektion mit Umkehrabbildung f^{-1}, so kann für B \subset Y die Notation f^{-1} (B) die Bildmenge von B unter f^{-1}, aber auch die Urbildmenge von B unter f bezeichnen. Man zeige jedoch, dass diese beiden Mengen übereinstimmen.

**Aufgabe 1.17.** Man gebe Beispiele von Relationen auf Mengen an, die

(1) reflexiv, symmetrisch, aber nicht transitiv sind;

(2) symmetrisch, transitiv, aber nicht reflexiv sind;

(3) reflexiv, transitiv, aber nicht symmetrisch sind;

(4) weder reflexiv, noch symmetrisch noch transitiv sind.

**Aufgabe 1.18.** Auf einer Menge X seien Äquivalenzrelationen R\_1 und R\_2 gegeben. Welche der folgenden Relationen sind wieder Äquivalenzrelationen? Warum?

(1) xR\_3y \Leftrightarrow xR\_1y und xR\_2y,

(2) xR\_4y \Leftrightarrow xR\_1y oder xR\_2y,

(3) xR\_5y \Leftrightarrow es gibt ein z \in X mit xR\_1z und zR\_2y.

**Aufgabe 1.19.** Man beweise direkt anhand der Definition:

(1) f: \R \rightarrow \R\_+, f(x) = 1 / \sqrt {1 + x^2} ist gleichmäßig stetig;

(2) \cos x, \sin x sind auf \R gleichmäßig stetig;

(3) f(x) = \frac {1 + x^2} {1 + x} ist bei x\_0 = 1 stetig.

</Seite 19> <Seite 20>

Seite 20 ist leer.

</Seite 20><Seite 21>

# Kapitel 2: Natürliche Zahlen und das Prinzip der vollständigen Induktion

## 2.1. Natürliche und ganze Zahlen

Das Zählen ist eine alte Kulturleistung des Menschen. Dies hat Leopold Kronecker veranlasst zu dem Ausspruch (1886 bei einem Vortrag bei der Berliner Naturforscher-Versammlung)

„Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.“

*(Fußnote 1:* Leopold Kronecker, geb. 1823 in Liegnitz (heute Legnica/PL), gest. 1891 in Berlin. Er leistete wesentliche Beiträge zur Algebra, Zahlentheorie und Funktionentheorie. Am Liegnitzer Gymnasium war unter anderem der spätere Professor der Berliner Universität Ernst Eduard Kummer sein Mathematiklehrer; bei ihm promovierte er 1845 mit einer Arbeit über komplexe Einheiten. Ab 1855 Privatgelehrter an der Universität Berlin. Zu seinen Schüler zählte unter anderem Georg Cantor. 1861 wurde Kronecker ordentliches Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften. Einen Ruf auf eine Professur in Göttingen lehnte er 1868 ab. Er blieb in Berlin und folgte dort 1883 seinem ehemaligen Lehrer Kummer auf dessen

Lehrstuhl nach. Nach ihm benannt sind u.a. das Kronecker-Delta \delta\_{ij} und das Kronecker-Produkt von Matrizen, welches abstrakt dem Tensorprodukt der unterliegenden linearen Abbildungen entspricht. *Ende der Fußnote 1)*

Im Jahre 1888 erschien Dedekinds berühmte kleine Schrift „Was sind und was sollen die Zahlen“, in der er unter dem Einfluss der Cantor’schen Mengenlehre und der sich etablierenden mathematischen Logik einen logischen Aufbau des Begriffs der natürlichen Zahl vollzog, der sich auf die Grundbegriffe Mengen und Abbildungen stützte. Ein Jahr später, 1889, stellte der Italiener Giuseppe Peano ein Axiomensystem für die natürlichen Zahlen auf, das im Wesentlichen mit dem heute gebrauchten identisch ist.

*(Fußnote 2:* Giuseppe Peano, geb. 1858 in Spinetta, Piemont, gest. 1932 in Turin. Italienischer Mathematiker. Er befasste sich mit den Grundlagen der Mathematik seiner Zeit: Neben Mengenlehre und Logik auch mit der Strenge in der Analysis (siehe etwa die von ihm entdeckte raumfüllende Peano-Kurve) *Ende der Fußnote 2)*

Mit Null beginnend folgt jeder Zahl n eine neue Zahl \nu(n), die Nachfolger heißt. In den sogenannten Peano-Axiomen wird der Zählprozess formalisiert:

(N0) Die natürlichen Zahlen bilden eine Menge \N mit einem ausgezeichneten

Element 0.

(N1) Auf \N ist eine Abbildung \nu: \N \rightarrow \N^{\ast} := \N - \{ 0 \} erklärt.

(N2) Wenn n\_1 \not= n\_2, dann ist \nu(n\_1) \not= \nu(n\_2).

(N3) Enthält eine Teilmenge A \subset \N die Zahl 0 und ist mit jedem n \in A auch

\nu(n) \in A, so ist A = \N („Prinzip der vollständigen Induktion“).

Die Zahlen ergeben sich durch Iteration der Nachfolger-Abbildung \nu,

0, \nu(0), \nu(\nu(0)) =: \nu^2(0), \nu^3(0), …,

doch natürlich schreiben wir stattdessen

0, \nu(0) =: 1, \nu^2(0) =: 2, ….

Alle übrigen Eigenschaften der natürlichen Zahlen lassen sich rein logisch aus den Peano-Axiomen herleiten. Dies wollen wir hier nicht vorrechnen; Details findet der Leser in dem klassischen Buch von E. Landau, [**La**]. Insgesamt definiert man auf \N eine Addition, geschrieben +, und eine Multiplikation geschrieben \cdot

*(in diesem Skript \*)*, die für beliebige x, y, z , … \in \N folgende Eigenschaften haben:

</Seite 21><Seite 22>

(A1) x + y = y + x (Kommutativgesetz der Addition)

(A2) (x + y) + z = x + (y + z) (Assoziativgesetz der Addition)

(A3) 0 + x = x + 0 = x (0 ist das neutrale Element der Addition)

(M1) x \* y = y \* x (Kommutativgesetz der Multiplikation)

(M2) (x \* y) \* z = x \* (y \* z) (Assoziativgesetz der Multiplikation)

(M3) 1 \* x = x \* 1 = x (1 ist das neutrale Element der Multiplikation)

(M4) (x + y) \* z = x \* z + y \* z (Distributivgesetz)

Zudem ergibt sich aus der iterativen Konstruktion von \N sofort eine Ordnungsrelation: Wir vereinbaren, x \le y zu schreiben, falls x = y ist oder falls y ein Nachfolger von x ist. Neben den drei Eigenschaften einer Ordnungsrelation gelten in diesem speziellen Fall die weiteren wohlbekannten Rechenregeln:

(ON1) Für alle x, y \in \N gilt x \le y oder y \le x (Linearität oder Vergleichbarkeit)

(ON2) Aus x \le y folgt x + z \le y + z für alle z \in \N (Monotonie der Addition)

(ON3) Aus x \le y folgt x \* z \le y \* z für alle z \in \N (Monotonie der Mult. mit \N)

Cartoon:

Kleiner Junge: YOU KNOW, I DON’T THINK MATH IS A SCIENCE; I THINK IT’S A

RELIGION.

Tiger: A RELIGION?

Kleiner Junge: YEAH. ALL THESE EQUATIONS ARE LIKE MIRACLES. YOU TAKE

TWO NUMBERS AND WHEN YOU ADD THEM, THEY MAGICALLY

BECOME ONE **NEW** NUMBER. NO ONE CAN SAY HOW IT

HAPPENS.YOU EITHER BELIEVE IT OR YOU DON’T.

THIS WHOLE BOOK IS FULL OF THINGS THAT HAVE TO BE

ACCEPTED ON FAITH! IT’S A RELIGION!

Tiger: AND IN THE PUBLIC SCHOOLS NO LESS. CALL A LAWYER.

Kleiner Junge: AS A MATH ATHEIST; I SHOULD BE EXCUSED FROM THIS.

Der sogenannte Ring \Z der ganzen Zahlen entsteht aus \N mit Hilfe einer Standardkonstruktion der Algebra. Zu jedem Element n \in \N wird ein weiteres Element n’ hinzugenommen, welches als die Lösung der Gleichung x + n = 0 definiert wird. Dies ist ein Beispiel einer Zahlbereichserweiterung, welche wir kurz skizzieren wollen.

Wir betrachten die Menge \N x \N aller Paare natürlicher Zahlen und definieren darauf die Äquivalenzrelation (was zu prüfen ist …)

(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = c + b.

Addition und Multiplikation auf \N x \N sind definiert als

(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), (a, b) \* (c, d) = (ac + bd, ad + bc).

Die Menge der Äquivalenzklassen nennen wir \Z. Die Äquivalenzklasse eines Paares (a, b) schreiben wir dann a – b; insbesondere ist (0, b) gleich –b (offensichtlich das gleiche wie (1, b + 1) = 1 – (b + 1)).

</Seite 22><Seite 23>

Diese erfüllt (b, 0) + (0, b) = (0, 0), es ist also die gewünschte Lösung der Gleichung

x + b = 0, wenn wir die natürlichen Zahlen \N injektiv abbilden in \N x \N / \sim als

n \mapsto n – 0.

Indem wir von jeder Äquivalenzklasse einen Repräsentanten auswählen, erhalten wir

\Z = \{ …, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, … \}.

Die ganzen Zahlen bilden einen Ring bezüglich der Addition und der Multiplikation, d.h. sie können ohne Einschränkungen addiert, subtrahiert und multipliziert werden. dabei gelten das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz für Addition und

Multiplikation, außerdem die Distributivgesetze. Wir verzichten auf eine Wiederholung dieser Fakten, die uns von Kindesbeinen an wohlvertraut sind. Dieser Ring erbt die totale Ordnung von \N, denn wir nennen (0, b) < (0, b’) genau dann, wenn b > b’. Dies entspricht der Reihung … < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < … Die

Menge \Z ist allerdings noch kein Körper, denn die Gleichung 2x = 1 besitzt in \Z keine Lösung. Der kleinste Körper, der \Z enthält, ist \Q. Diesen werden wir bald kennen lernen.

## 2.2. Das Prinzip der vollständigen Induktion

Aus dem Induktionsaxiom (N3) folgen zwei wichtige Beweismethoden; im Kern sind sie äquivalent, aber ihre unterschiedliche Formulierung führt auf unterschiedliche Anwendungssituationen. Wir wiederholen (N3) hier:

(N3) Enthält eine Teilmenge A \subset \N die Zahl 0 und ist mit jedem n \in A auch

\nu(n) \in A, so ist A = \N („Prinzip der vollständigen Induktion“).

Zunächst überlegen wir uns eine wichtige Folgerung.

**<satz> Satz 1.** Für jedes n \in \N sei a(n) eine Aussage über die Zahl n. Ist a(n\_0) richtig und folgt aus der Richtigkeit von a(n) diejenige von a(n + 1), so ist a(n) für alle n \ge n\_0 richtig. </satz>

**<beweis>**Wir behandeln zunächst den Fall n\_0 = 0. Sei A die Menge aller n \in \N, für die die Aussage a(n) zutrifft. Nach Voraussetzung gilt 0 \in A und mit jedem n ist auch n + 1 in A. Damit impliziert (N3), dass A = \N ist. Ist nun n\_0 \in \N beliebig, so ändern wir leicht die Definition von A. Wir setzen n\_1 = n\_0 + 1, n\_2 = n\_0 + 2, usw. und definieren A nun als die Menge der Indizes i, für die a(n\_i) richtig ist. Nun argumentiert man wie eben.

</beweis>

Als nächstes zeigen wir, dass aus (N3) folgende Eigenschaft der natürlichen Zahlen folgt (sie ist zu (N3) sogar äquivalent, aber das benötigen wir nicht).

**<satz> Satz 2.** Jede nichtleere Menge A \subset \N besitzt ein kleinstes Element. </satz>

**<beweis>**Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Dazu sei A \subset \N eine Menge natürlicher Zahlen, die kein kleinstes Element besitzt. Wir bilden die Menge B aller

n \in \N, die von keinem Element x \in A „unterboten“ werden,

B := \{ n \in \N : x \le n \Rightarrow x \not in A \}.

Da A kein kleinstes Element enthält, ist sicher 0 \not in A und damit x \not in A für alle

x \le 0 (0 ist ja das einzige solche x). Hieraus folgt 0 \in B. Ist zweitens n \in B, so enthält A jedenfalls keine Elemente \le n. Wäre jetzt n + 1 \in A, so wäre damit n + 1 das kleinste Element von A, entgegen der Voraussetzung. Folglich gilt sogar, dass A keine Elemente \le n + 1 enthält. Das heißt aber n + 1 \in B. Nach dem Axiom (N3) ist dann B = \N und A = \{ \}.

</beweis>

**<definition> Definition 1** (Wohlordnung)**.** Eine Menge X heißt wohlgeordnet, falls jede ihrer nichtleeren Teilmengen ein kleinstes Element besitzt. Satz 2 besagt also, dass \N wohlgeordnet ist. </definition>

Wir zeigen nun, wie man in der Praxis diese beiden Sätze zum Beweisen vielfältiger mathematischer Sachverhalte verwenden kann.

</Seite23><Seite 24>

**Induktionsbeweise.** Induktionsbeweise gehören zum Grundhandwerkszeug eines jeden Mathematikers. Anfangs sollte man sich bemühen, den Induktionsanfang

(„IA“, d.h. die Überprüfung der Eigenschaft für n = n\_0) und den Induktionsschritt

(„IS“, d.h. der Nachweis, dass aus a(n) die Eigenschaft a(n + 1) folgt) klar erkennbar zu machen. Die Annahme, dass a(n) für ein n gilt, wird Induktionsvoraussetzung genannt („IV“). Wir wollen zum Beispiel mit dieser Methode zeigen:

**<lemma> Lemma 1.** Es ist für jedes n \ge 1: 1 + 2 + … + n = n\*(n + 1) / 2. </lemma>

**<beweis>**

IA: Für n = 1 steht links 1, rechts 1\*2/2 = 1.Damit gilt die Aussage für n\_0 = 1.

IS: Es gelte die Aussage für n (IV). dann ist

1 + 2 + … + n + (n + 1) =

= [1 + 2 + … + n ] + n + 1 \stackrel{IV}{=} n\*(n + 1) / 2 + n + 1 =

= \frac {n\*(n + 1) + 2\*(n + 1)}{2} = \frac {(n + 1)\*(n + 2)}{2}.

Dies ist aber genau die gewünschte Eigenschaft für n + 1 an Stelle von n. Dies beendet den Beweis.

</beweis>

**<bemerkung> Bemerkung 1.** Manchmal können Induktionsbeweise Schönheitsfehler haben, dass man nicht „sieht“, warum die Eigenschaft richtig ist (aber ein uneleganter Beweis ist allemal besser als gar keiner). Im eben genannten Beispiel gibt es einen alternativen Beweis, der (mindestens) genauso schnell ist und allgemein als „cleverer“ angesehen wird. Angeblich machte der neunjährige Carl Friedrich Gauß mit dieser Lösung seinem Lehrer Büttner einen Strich durch die Rechnung, der mit der Aufgabe, die Zahlen von 1 bis 100 aufzusummieren, seine Schüler für eine Weile beschäftigen wollte.

*(Fußnote 3:* Carl Friedrich Gauß, geb. 1777 in Braunschweig, gest. 1855 in Göttingen. Einer der bedeutendsten Mathematiker aller Zeiten. Im Alter von neunzehn Jahren gelang es ihm, die Konstruierbarkeit des regelmäßigen Siebzehnecks zu beweisen. Er leistete Beiträge zur Zahlentheorie (Primzahlverteilung), Wahrscheinlichkeits- und Fehlerrechnung (Gauß-Verteilung, Methode der kleinsten Fehlerquadrate), Funktionentheorie (elliptische Funktionen), Algebra (komplexe Zahlen), Differentialgeometrie (Gauß’sche Krümmung), Analysis (Gauß’scher Integralsatz), Magnetismus (Magnetfelder werden in Gauß gemessen), Optik. Weniger bekannt sind seine langjährigen Arbeiten in Astronomie und Geodäsie. Die Fehlerrechnung erfand Gauß, um den Fehler bei diesen

Berechnungen abschätzen zu können, und er beherrschte (ohne Computer!) die Himmelsmechanik so gut, dass er die Position des Zwergplaneten Ceres exakt vorhersagte. *Ende der Fußnote 3)*

Gauß fiel nämlich auf, dass bei

1 + 2 + 3 + … + (n – 2) + (n – 1) + n

Die Summe vom ersten mit dem letzten, vom zweiten mit zweitletzten Summanden usw. immer die gleiche, nämlich n + 1 ist. Wenn n gerade ist, sind dies genau n/2 Zahlenpaare, also zusammen (n + 1)\*n/2. Bei ungeradem n sind es nur (n – 1)/2 Zahlenpaare, und in der Mitte steht einzeln (n + 1)/2. Aber

(n + 1)\*(n – 1)/2 + (n + 1)/2 = n\*(n + 1)/2,

so dass man dasselbe Ergebnis erhält.

Es gibt noch einen weiteren direkten und eleganten Beweis von Lemma 1, diesmal geometrisch, über den nachzudenken sich lohnt: Betrachte die Stufen der Höhe

1, 2, 3, …, n und Breite 1 wie im nächsten Bild aneinandergereiht.

*<abbildung> Beschreibung des Bildes auf Seite 25: Im 1. Quadranten eines Koordinatensystems sind Rechtecke der Breite 1 eingezeichnet. Das erste Rechteck von links hat die Eckpunkte (0|0), (1|0), (1|1) und (0|1), das zweite sich anschließende Rechteck hat die Eckpunkte (1|0), (2|0), (2|2) und (1|2), das dritte hat folgende Eckpunkte (2|0), (3|0), (3|3), (2|3) usw.. Durch die oberen rechten Eckpunkte der Rechtecke ist eine Ursprungsgerade gezeichnet. Die Gerade schließt mit der x- Achse und der Parallelen zur y-Achse durch n eine große Dreiecksfläche ein und schneidet von den Rechtecken in deren oberen Teil n kleine Dreiecke ab.*

*</abbildung>*

Ihre Gesamtfläche F (*Anmerkung: der Stufen/Rechtecke)* ist offenbar gleich

1 + 2 + 3 + … + n, kann aber auch berechnet werden als die Fläche des grau hinterlegten großen Dreiecks und die der n kleinen Dreiecke, also insgesamt

F = n^2 / 2 + n\*1/2 = 1/2\*n\*(n + 1).

Dies ist das gesuchte Ergebnis! Man sieht, dass ein und dieselbe Aussage viele Beweise haben kann, die unterschiedliche Methoden verwenden. Wenn Sie also eine Hausaufgabe anders lösen als Ihr Zettelpartner, muss das noch lange nicht falsch sein ….

</Seite 24><Seite 25>

*Bildbeschreibung s. o.*

**<bemerkung> Bemerkung 2.** Mittels vollständiger Induktion lässt sich fabelhafter Unsinn beweisen, wenn man den Induktionsanfang weglässt. Zum Beispiel kann man dann beweisen, dass 1 + 2 + … + n = (n + 1/2)^2 / 2 ist, obwohl dies schon für n = 2 offensichtlich falsch ist. Aber der Induktionsschritt geht problemlos durch: Angenommen, dies gilt für n, dann folgt

1 + 2 + … + n + (n + 1) \stackrel{IV}{=} (n + 1/2)^2 / 2 + (n + 1) =

= (n^2 + 3n + 9/4) / 2 = (n + 1 + 1/2)^2 / 2.

Trotzdem ist die Aussage falsch!

</bemerkung>

**„Die Jagd nach dem kleinsten Verbrecher“.** Wenn eine Induktion für eine Eigenschaft a(n) kompliziert ist, kann man sich mitunter mit folgender Argumentation behelfen. Angenommen, es existiert mindestens eine Zahl p \in \N, für die a(p) falsch ist. Nach Satz 2 muss es dann ein kleinstes solches p\_0 geben, für das a(p\_0) nicht gilt. Dieses Element p\_0 ist gerade der „kleinste Verbrecher“. Man zeigt dann, dass hieraus ein Widerspruch folgt. Damit gibt es keinen kleinsten Verbrecher und also gar keinen Verbrecher. Die Aussage a(n) ist daher für alle n \in \N richtig.

*(Fußnote 4:* Die bildliche Bezeichnung dieser Beweismethode scheint auf einen Münchner Mathematik-Professor zurück zu gehen und hat sich – zumindest lokal – so eingebürgert. Wer die Methode so seinen Erstsemestern veranschaulichen wollte, ist leider nicht überliefert*. Ende der Fußnote 4)*

Wir illustrieren diese Beweismethode mit dem Nachweis, dass jede natürliche Zahl eine Primfaktorzerlegung besitzt. Hierbei ist ein Beweis mittels vollständiger Induktion ungeschickt, weil die Primfaktorzerlegungen von n und n + 1 in keinerlei Beziehung zueinander stehen.

**<lemma> Lemma 2.** Jede natürliche Zahl n > 1 besitzt eine Zerlegung in endlich viele Primfaktoren. </lemma>

**<beweis>**Ist die Behauptung falsch, so gibt es eine kleinste Zahl n\_0, die sich nicht in Primfaktoren zerlegen lässt. Diese Zahl n\_0 ist dann jedenfalls keine Primzahl, besitzt also eine Zerlegung in zwei von 1 verschiedene Faktoren, n\_0 = p\*q. Hier sind p und q beide kleiner als n\_0 und besitzen daher nach Annahme eine Zerlegung in endlich viele Primfaktoren (n\_0 war ja der kleinste Verbrecher). Somit besitzt auch n\_0 eine solche Zerlegung, im Widerspruch zur Definition von n\_0.

</beweis>

## 2.3. Umgang mit Summen- und Produktzeichen

Es ist gebräuchlich, in der Mathematik Summen und Produkte mit einer nicht weiter festgelegten Anzahl Faktoren durch die Summen- und Produktzeichen \sum und

\prod darzustellen. Dies ist an vielen Stellen zweckmäßig, der Umfang ihres Gebrauchs allerdings Geschmackssache. In diesem Skript wird – ohne tiefere Begründung als die vermeintliche Ästhetik der dargestellten Formeln – beides abwechselnd benutzt.

</Seite 25><Seite 26>

**<definition> Definition 2.** Sind x\_1, x\_2, …, x\_n komplexe Zahlen, so setzt man

\sum\_{i=1}^n x\_i := x\_1 + x\_2 + … + x\_n,

\prod \_{i=1}^n x\_i := x\_1\*x\_2\* … \* x\_n.

</definition>

Dabei ist zu beachten, dass i ein sogenannter stummer Index ist. Damit ist gemeint, dass es nicht weiter von Belang ist, ob man diesen Index i, j, k oder \alpha, \beta, …nennt; manche Bezeichnungen sind allerdings üblicher als andere. Wir halten fest:

\sum\_{i=1}^n x\_i = \sum\_{\alpha=1}^n x\_\alpha = …,

\prod\_{i=1}^n x\_i = \prod\_{j=1}^n x\_j = …

Die Zahlen i = 1, … durchlaufen dabei die sog. Indexmenge I. Der Index n darf dagegen nicht umbenannt werden, da er angibt, wie viele Terme insgesamt vorkommen!

Eine wichtige Umformung sind Umindizierungen. Man könnte die Summe zum Beispiel wie folgt umschreiben:

\sum\_{i=1}^n x\_i = \sum\_{i=0}^{n-1} x\_{i+1},

denn wenn man die Indizes der x\_i bzw. x\_{i+1} explizit hinschreibt, erhält man die gleichen. Man kann auch einzelne Terme aus der Summation herausnehmen,

\sum\_{i=1}^n x\_i = x\_1 + \sum\_{i=2}^n x\_i = x\_n + \sum\_{i=1}^{n-1} x\_i =

= x\_k + \sum\_{i=1, i \not=k}^n x\_i für jedes 1 \le k \le n.

Summen und Produkte mit gleicher Indexmenge I kann man auseinander ziehen und zusammenfassen,

\sum\_{i=1}^n (x\_i + y\_i) = \sum\_{i=1}^n x\_i + \sum\_{i=1}^n y\_i,

\prod\_{i=1}^n x\_i\*y\_i = \prod\_{i=1}^n x\_i \* \prod\_{i=1}^n y\_i.

So wie man aus cx\_1 + cx\_2 + … + cx\_n den Faktor c herausziehen kann, gilt dies auch für abstrakte Summen und Produkte (aber Vorsicht beim Produkt!),

\sum\_{i=1}^n c\*x\_i = c\*\sum\_{i=1}^n x\_i,

\prod\_{i=1}^n c\*x\_i = c^n\*\prod\_{i=1}^n x\_i.

Stellen wir uns nun Zahlen x\_{ij} vor, die von zwei Indizes abhängen, etwa die Einträge einer nicht unbedingt quadratischen Matrix. Es sei i = 1, …, n,

j = 1, …, m. Dann kann die Doppelsumme über beide Indizes gebildet werden. Die folgenden Bezeichnungen sind dafür üblich:

\sum\_{i=1}^n [\sum\_{j=1}^m x\_{ij}] = \sum\_{j=1}^m [\sum\_{i=1}^n x\_{ij}].

Die Reihenfolge der Summation ist inhaltlich unerheblich, kann aber beweistechnisch wichtig sein! (im Matrixbild: Kontrolle über die Spaltensummen ist nicht das gleiche wie über die Zeilensummen). Mitunter benützt man auch die Schreibweise

\sum\_{stackrel{i=1, …, n}{j=1, …, m}} x\_{ij},

ob man sie hübsch findet, ist Geschmackssache. In der Praxis ist sie wegen der unterschiedlichen Indexmengen gefährlich. Nur wenn n = m ist, kürzt man oft und gerne ab,

\sum\_{i=1}^n [\sum\_{j=1}^m x\_{ij}] = \sum\_{i,j=1}^n x\_{ij}.

</Seite 26><Seite 27>

Analoges gilt für Produkte. Insgesamt sind Summen- und Produktzeichen einfach ein handliches Werkzeug, bei dem Respekt angebracht ist (man hüte sich vor zu vielen verschachtelten Summen mit unklaren Summationsgrenzen), aber übertriebene Ehrfurcht nicht weiter hilft.

## 2.4. Die rationalen Zahlen

Von allen uns bekannten Zahlbereichen wurden die rationalen erstaunlicherweise als letzte in voller mathematischer Strenge beschrieben (\N: um 1888; \R: 1872). Die Definition der rationalen Zahlen durch Paarbildung aus natürlichen Zahlen erfolgte erst 1895 durch Heinrich Weber in seinem „Lehrbuch der Algebra“:

*(Fußnote 5:* Heinrich Weber, geb. 1842 in Heidelberg, gest. 1913 in Straßburg. Studium in Heidelberg, Leipzig und Königsberg. Professor an der ETH Zürich, der Universität Königsberg, TU Berlin, Marburg (1884 – 1892), Göttingen und Straßburg. Er gründete 1885 in Marburg das Mathematische Seminar, aus dem später der Fachbereich 12 wurde. Neben Beiträgen zur Algebra (von ihm stammt wohl die Bezeichnung „Normalteiler“, Satz von Kronecker-Weber über Kreisteilungskörper \rightarrow Algebra 2) hat er auch wichtige Beiträge zur Funktionentheorie und den partiellen Differentialgleichungen (Weber’sche Differentialgleichung) geleistet. Seine Lieblingstochter Emilie muss mathematisch sehr bewandert gewesen sein, da sie z.B. die Werke von H. Poincar\acute{e} ins Deutsche übersetzte. Leider starb sie bereits 1911. *Ende der Fußnote 5)*

*Zitat aus dem Lehrbuch der Algebra:*

Die natürlichen Zahlen bilden eine geordnete Menge; zwischen zwei auf einander folgenden ihrer Elemente liegen keine weiteren. […] Eine dichte Menge kann man bilden, wenn man die natürlichen Zahlen in Paaren zusammenfasst und diese Paare als Elemente einer Menge auffasst. Diese Paare sollen Brüche genannt und mit

m : n oder \frac {m} {n} bezeichnet werden, und zwei solche Brüche m : n und m’ : n’ werden einander gleich gesetzt, wenn m\*n’ = n\*m’ gilt.

An dieser Definition hat sich nicht viel geändert, wir wiederholen sie nur in moderner Sprache:

**<definition> Definition 3.** Wir bezeichnen mit \Q die Menge der Äquivalenzklassen

\Z x \Z^\ast / R, wobei die Paare (m, n) und (m’, n’) genau dann unter R äquivalent sein sollen, also (m, n)R(m’, n’), wenn m\*n’ = n\*m’ gilt. Die Äquivalenzklasse von (m, n) schreiben wir [m, n]; es ist also z.B. [m, n] = [km, kn] für k \in \Z^\ast. Addition und Multiplikation sind dann auf den Äquivalenzklassen definiert durch

[m\_1, n\_1] + [m\_1, n\_2] := [m\_1\*n\_2 + n\_1\*m\_2, n\_1\*n \_2],

[m\_1, n\_1]\*[m\_2, n\_2] := [m\_1\*m\_2, n\_1\*n\_2].

Dies entspricht in der uns geläufigeren Schreibweise den Rechenregeln

\frac {m\_1} {n\_1} + \frac {m\_2} {n\_2} = \frac {m\_1\*n\_2 + n\_1\*m\_2} {n\_1\*n\_2},

\frac {m\_1} {n\_1} \* \frac {m\_2} {n\_2} = \frac {m\_1\*m\_2} {n\_1\*n\_2}.

Die Brüche muss man dann noch kürzen, beim Rechnen mit Äquivalenzklassen fällt dieser Schritt weg. Wenn m\_2 \not= 0, so ist das Inverse bzgl. der Multiplikation gegeben durch

\frac {[m\_1, n\_1]} {m\_2, n\_2]} = [m\_1\*n\_2, n\_1\*m\_2], also

m\_1/n\_1 : m\_2/n\_2 = \frac {m\_1\*n\_2} {n\_1\*m\_2}.

</definition>

Wie in der linearen Algebra ausführlich beschrieben, bilden die rationalen Zahlen einen Körper. Wir gehen an dieser Stelle hierauf nicht weiter ein. Wir zeigen später,

dass es genauso viele rationale wie ganze Zahlen gibt und dass \R intuitiv dadurch entsteht, die Lücken in \Q zu schließen.

## Aufgaben

**Aufgabe 2.1.** Finden und beweisen Sie eine Formel für die Anzahl Spielkarten, die man für ein Kartenhaus mit n Etagen benötigt (das Bild zeigt ein Kartenhaus mit drei Etagen).

</Seite 27><Seite 28>

*Beschreibung des Bildes: In der unteren Reihe sind drei Paare von Karten so gegeneinander aufgestellt, dass sie nicht umfallen: es entstehen drei nach unten geöffnete gleichseitige Dreiecke und zwei nach oben geöffnete. Die beiden nach oben geöffneten gleichseitigen Dreiecke werden mit je einer flach liegenden Karte abgedeckt. Darauf werden 2 Paare von Karten gegeneinander gestellt und das in der Mitte entstandene nach oben geöffnete gleichseitige Dreieck wird wieder mit einer flach liegenden Karte abgedeckt. Den Abschluss nach oben bildet ein Paar gegeneinander gestellter Karten.*

**Aufgabe 2.2.** Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Ungleichungen:

(1) 1/2\*3/4\*5/6\* …\*(2n – 1)/(2n) \le 1 / \sqrt {3n + 1} (n \ge 1),

(2) (n + 1)! \ge \sum\_{k=1}^n k! (n \ge 1),

(3) \sum\_{k=1}^n (1 / \sqrt {k}) > \sqrt {n} (n \ge 2].

**Aufgabe 2.3.** Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion für n \in \N, n \ge 1 die Identitäten:

(1) \sum\_{k=1}^n (2k – 1) = n^2,

(2) \sum\_{k=1}^n k^2 = n\*(n + 1)\*(2n + 1) / 6,

(3) \sum\_{k=1}^n k^3 = n^2\*(n + 1)^2 / 4,

(4) \prod\_{k=1}^n (4k – 2) = \prod\_{k=1}^n (n + k),

(5) 3\*\sum\_{k=1}^{n+1} (2k – 1)^2 = 4n^3 + 12n^2 + 11n + 3.

**Aufgabe 2.4.** Beweisen Sie einmal mittels vollständiger Induktion, einmal mittels geeigneter trigonometrischer Umformung (x \not= 0)

(1) \sum\_{k=1}^n \sin (kx) = \frac {\sin ((n + 1)\*x/2) \* \sin(nx/2)} {\sin (x/2}

(2) 1/2 + \sum\_{k=1}^n \cos (kx) = \frac {\sin ((2n + 1)\*x/2) {2\*\sin (x/2)}

**Aufgabe 2.5.** Sei f: I \rightarrow \R eine differenzierbare reellwertige Funktion auf einem Intervall. Man beweise aus der Produktregel (fg)’ = f’g + fg’ per Induktion, dass für die Ableitung der n-ten Potenz von f gilt: [f^n]’(x) = n\*f^{n-1}(x)\*f’(x).

</Seite 28><Seite 29>

# Kapitel 3: Reelle und komplexe Zahlen

## 3.1. Reelle Zahlen

Mittlerweile sind uns folgende Zahlen bekannt:

(1) \N: Menge der natürlichen Zahlen (0),1,2,3,…

(2) \Z: Menge der ganzen Zahlen 0,\pm1,\pm2,…

(3) \Q: Menge der rationalen Zahlen p/q, mit p, q \in \Z und q \not= 0

Es gibt im Kern zwei verschiedene Möglichkeiten, die reellen Zahlen einzuführen, wenn man die rationalen Zahlen schon kennt:

(1) als Grenzwerte von Cauchy-Folgen – diese werden Sie in der Analysis-Vorlesung

kennenlernen, da sie dort eine wesentliche Rolle spielen.

(2) als sog. Dedekind’sche Schnitte, das ist am schnellsten und anschaulichsten.

*(Fußnote 1:* Richard Dedekind, geb. 1831 in Braunschweig, gest. 1916 ebenda. Studium der Mathematik in Braunschweig und Göttingen; Promotion 1852 als letzter Schüler von Carl Friedrich Gauß, Habilitation 1854 (beides in Göttingen). 1858 – 1862 Ordinarius am Polytechnikum Zürich (heute ETH Zürich), danach bis zu seiner Emeritierung 1894 Professor für Mathematik in Braunschweig. Er leistete wichtige Beiträge zur Algebra („Dedekind’sche Ringe“), Funktionentheorie („Dedekind’sche

\eta- und \zeta-Funktion) und Gruppentheorie. *Ende der Fußnote 1)*

Wir erläutern hier kurz die Methode der Dedekind’schen Schnitte. Allerdings können wir nicht alles beweisen (Gegenstand einer separaten Vorlesung), sondern stellen die Grundeigenschaften der reellen Zahlen zusammen, die auch als ‚Axiome’ verwandt werden können. Bei allen späteren Beweisen werden wir nur diese Grundeigenschaften verwenden.

*An dieser Stelle befindet sich ein Bild einer Briefmarke aus der DDR mit dem Kopf von Dedekind.*

**<definition> Definition 1**. Ein Dedekind’scher (A, B) ist eine Zerlegung \Q = A \cup B der rationalen Zahlen in zwei disjunkte Teilmengen mit der Eigenschaft, dass jedes Element a \in A echt kleiner als jedes Element b \in B ist:

\forall a \in A, \forall b \in B: a < b.

Dabei wird A Unterklasse und B Oberklasse des Dedekind’schen Schnitts (A, B) genannt. Um eine reelle Zahl durch genau einen Schnitt darzustellen, vereinbart man, nur solche Schnitte zu betrachten, deren Unterklasse kein größtes Element besitzt.

Die Menge aller Dedekind’schen Schnitte mit dieser Eigenschaft nennt man die Menge \R der reellen Zahlen.

</definition>

Anschaulich passiert folgendes: Man nimmt die Zahlengerade und „zerschneidet“ sie an beliebiger Stelle in zwei Halbgeraden; dann ist A das linke Stück (ohne Schnittpunkt), B das rechte Stück der Zahlengerade (mit Schnittpunkt).

*Die eingefügte Zeichnung verdeutlicht das.*

Offenbar sind für B zwei Fälle möglich:

(1) B enthält eine kleinste rationale Zahl, d.h. es existiert ein r \in B mit r \le x für alle  
 x \in B: der Schnitt fällt dann genau auf eine rationale Zahl.

(2) B enthält keine kleinste rationale Zahl: Der Schnitt fällt in eine „Lücke“, wo keine   
 rationale Zahl liegt.

</Seite 29><Seite 30>

Im ersten Fall identifizieren wir den Schnitt (A, B) mit der Zahl r \in Q – und

B = \{ x \in \Q: r \le x \}, A = \Q – B ist offenbar ein Dedekind’scher Schnitt, der die Zahl r \in \Q darstellt. Die Null 0 \in \Q wird etwa dargestellt durch den Nullschnitt

A\_0 = \{ x \in \Q: x < 0 \}, B\_0 = \{ x \in \Q: x \ge 0 \}.

Damit ist auf natürliche Weise \Q \subset \R. Gibt es überhaupt Dedekind’sche Schnitte vom zweiten Typ, also solche, die keine rationalen Zahlen darstellen?

**<beispiel> Beispiel 1**. Wir betrachten den Schnitt

B = \{ x \in \Q: 0 \le x und 2 \le x^2 \}, A = \Q – B.

Wir wollen zeigen, dass (A, B) eine irrationale Zahl, genannt \sqrt {2} darstellt (Fall (2)). Angenommen, B enthält ein kleinstes Element r. Dann ist r \in \Q mit r > 0 und r^2 = 2

[wäre r^2 > 2, dann ließe sich eine rationale Zahl r’ > 0 konstruieren mit r’ < r und 2 \le r’^2 < r^2; damit ist r nicht kleinstes Element in B].

Folglich existieren natürliche teilerfremde Zahlen m und n derart, dass r = m/n. Dann gilt 2n^2 = m^2, also 2 | m^2. Da 2 eine Primzahl ist, gilt auch 2 | m, d.h. m = 2k. Damit haben wir aber

2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2 und n^2 = 2k^2, also 2 | n^2 und damit 2 | n.

Dies widerspricht der Annahme, dass m und n teilerfremd sind: der Schnitt (A, B) entspricht einer „Lücke“, die man \sqrt {2} nennt. Nebenbei haben wir noch gezeigt, dass \sqrt {2} irrational ist. Mit dem gleichen Argument zeigt man, dass A kein größtes Element enthält, (A, B) also wirklich einen Schnitt definiert.

</beispiel>

Zunächst wollen wir eine Ordnungsrelation in \R definieren: Sind A\_1, A\_2 die Unterklassen zweier Dedekind’scher Schnitte, die die reellen Zahlen a\_1, a\_2 repräsentieren, so schreiben wir a\_1 < a\_2 genau dann, falls A\_1 \subsetnoteq A\_2. Insbesondere zerfallen die reellen Zahlen in zwei Teilmengen und die Null, nämlich in

\R^+: die Menge der positiven reellen Zahlen, definiert als diejenigen Schnitte,

deren Unterklasse A die Inklusion A\_0 \subsetnoteq A erfüllen,

\R^-: die Menge der negativen reellen Zahlen, definiert als diejenigen

Schnitte, deren Unterklasse A die Inklusion A \subsetnoteq A\_0 erfüllen.

Es gilt: \R = \R^- \cup \{ \} \cup \R^+.

Um die Eigenschaften der Addition beschreiben zu können, müssen wir der Summe zweier Schnitte einen Sinn geben. Dabei reicht es, die Unterklasse A der Summe zu definieren, weil dann B = \Q – A ist. Wir definieren die Summe zweier Zahlen x, y \in \R, dargestellt durch die Unterklassen A\_x, A\_y als die reelle Zahl mit der Unterklasse

A\_x + A\_y := \{z | z = a\_x + a\_y, a\_x \in A\_x, a\_y \in A\_y \}.

Damit folgt etwa das Kommutativgesetz in \R sofort aus dem Kommutativgesetz in \Q. Das Negative eines Schnittes ist anschaulich zwar klar, aber schon etwas umständlich hinzuschreiben: Man überlegt sich, dass

-A := \{ x \in \Q | -x \not in A und –x ist nicht kleinstes Element von B = \Q –A \}

das Gewünschte leistet. Wir sagen „x ist kleiner oder gleich y“ und schreiben x \le y oder auch y \ge x, falls y – x \in \R^+ \cup \{ \} gilt. Diese Relation ist eine Ordnungsrelation (d.h. sie ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv). Ihre weiteren Eigenschaften beschreiben weiter unten.

**Eigenschaften der Addition**. Zwei reelle Zahlen x, y \in \R kann man addieren und damit eine neue reelle Zahl x + y \in \R bilden. Es gelten folgende Rechenregeln:

(A1) x + y = y + x (Kommutativgesetz der Addition)

(A2) (x + y) + z = x + (y + z) (Assoziativgesetz der Addition)

(A3) 0 + x = x + 0 = x (0 ist das neutrale Element der Addition)

(A4) Zu je zwei reellen Zahlen x, y \in \R existiert genau eine reelle Zahl z \in \R

mit x + z = y. Diese Zahl z – sie wird auch mit y – x bezeichnet – heißt Differenz

zwischen y und x.

Diese Eigenschaften kann man als Axiome ansehen, mit etwas Geduld beweist man sie aus der eben gegebenen Definition der Addition.

</Seite 30> <Seite 31>

**Eigenschaften der Multiplikation**. Zwei reelle Zahlen x, y \in \R kann man miteinander multiplizieren und damit eine neue reelle Zahl xy oder x\*y \in \R bilden.

Sind A\_x, A\_y die Unterklassen der Zahlen x und y, beide > 0, so hat x\*y einfach die Unterklasse

A\_x\*A\_y := \{ z | z = a\_x\*a\_y, a\_x \in A\_x, a\_y \in A\_y \}.

Das allgemeine Inverse und das Produkt für Schnitte unterschiedlichen Vorzeichens erfordert etwas Arbeit, wir verzichten deswegen hier darauf. Es gelten folgende Rechenregeln:

(M1) x\*y = y\*x (Kommutativgesetz der Multiplikation)

(M2) (x\*y)\*z = x\*(y\*z) (Assoziativgesetz der Multiplikation)

(M3) 1\*x = x \*1 = x (1 ist das neutrale Element der Multiplikation)

(M4) (x + y) \*z = x\*z + y\*z (Distributivgesetz)

(M5) Zu je zwei reellen Zahlen x, y \in \R existiert genau eine Zahl z \in \R mit

x\*z = y. Diese Zahl z – sie wird auch mit y/x bezeichnet – heißt Bruch zwischen

y und x.

All diese Eigenschaften zusammen machen die reellen Zahlen zu einem Körper.

Mit der Ordnungsrelation \le wird \R eine geordnete Menge; folgende Eigenschaften besagen, wie sich die Ordnungsrelation mit den Körperoperationen verträgt. Damit wird \R (genauso wie \Q) zu einem geordneten Körper.

(OR1) Für alle x, y \in \R gilt x \le y oder y \le x (Linearität oder Vergleichbarkeit)

(OR2) Aus x \le y folgt x + z \le y + z für alle z \in \R (Monotonie der Addition)

(OR3) Aus x \le y folgt x\*z \le y\*z für alle z \in \R^+ (Monotonie der Mult. mit \R^+)

Diese Eigenschaften sind die natürliche Fortsetzung der entsprechenden Eigenschaften für \Q.

Die Ordnungsrelation erlaubt die Definition von Intervallen:

[a, b] = \{ x \in \R: a \le x \le b \} „abgeschlossenes Intervall“

[a, b) = [a, b[ = \{ x \in \R: a \le x < b \} „halboffenes Intervall”

(a, b] = ]a, b] = \{ x \in \R: a < x \le b \} „halboffenes Intervall“

(a, b) = ]a, b[ = \{ x \in \R: a < x < b \} „ offenes Intervall“

Den Betrag |x| einer reellen Zahl x definieren wir durch

|x| := \left{ x falls x \ge 0 \\

-x falls x \le 0 \right.

(A*nmerkung: Hinter dem Gleichheitszeichen steht eine geschweifte Klammer „auf“, die über zwei Zeilen geht. 1. und 2. Zeile sind durch \\ getrennt. Es gibt keine geschweifte Klammer „zu“.)*

Es gilt dann:

(B1) |x\*y| = |x|\*|y|

(B2) |x + y| \le |x| + |y|

(B3) ||x| - |y|| \le |x + y|

Ein ganz wesentlicher Begriff in der Analysis ist die Beschränktheit und die darauf aufbauenden Begriffe Infimum und Supremum. Diese hatten wir bereits abstrakt für Ordnungsrelationen definiert. Wir wiederholen diese kurz:

(1) Eine Teilmenge A \subset \R heißt von oben beschränkt, falls eine Zahl M \in \R

mit a \le M für alle a \in A existiert. Jede Zahl M mit dieser Eigenschaft heißt   
 obere Schranke von A.

(2) Eine Teilmenge A \subset \R heißt von unten beschränkt, falls eine Zahl m \in R   
 mit m \le a für alle a \in A existiert. Jede Zahl m mit dieser Eigenschaft heißt   
 untere Schranke von A.

(3) Eine Teilmenge A \subset \R heißt beschränkt, falls sie sowohl von oben als auch   
 von unten beschränkt ist.

**<satz> Satz 1** (Infimums- und Supremumseigenschaft von \R)

(1) Sei A \subset \R eine von oben beschränkte Menge. Dann existiert genau eine   
 Zahl M\_0 mit folgenden Eigenschaften:

\forall a \in A: a \le M\_0 und

\forall \epsilon > 0 \exists a \in A mit M\_0 - \epsilon < a.

Die Zahl M\_0 heißt das Supremum der Menge A und wird mit sup A bezeichnet.

</Seite31><Seite 32>

(2) Sei A \subset \R eine von unten beschränkte Menge. Dann existiert genau eine

Zahl m\_0 mit folgenden Eigenschaften:

\forall a \in A: m\_0 \le a und

\forall \epsilon > 0 \exists a \in A mit a < m\_0 + \epsilon.

Die Zahl m\_0 heißt das Infimum der Menge A und wird mit inf A bezeichnet.

**<beweis>**Wir zeigen nur (1), weil (2) ganz analogbewiesen wird. Gegeben sei also eine von oben beschränkte Menge A \subset \R. Sei Y\_A die Menge aller rationalen oberen Schranken von A,

Y\_A := \{ M \in \Q | \forall a \in A: a \le M \}.

Y\_A ist nicht leer, da A nach Voraussetzung mindestens eine obere Schranke besitzt. Zudem hat Y\_A die Eigenschaft, dass für M \in Y\_A und jedes

M \le \tilde{M} gilt: \tilde{M} \in Y\_A. Setze:

X\_A := \Q – Y\_A. Dann gilt:

(1) \Q = X\_A \cup Y\_A disjunkte Vereinigung,

(2) Ist x \in X\_A und y \in Y\_A, so existiert a \in A mit x < a \le y. Also folgt y < x;

(3) Die Unterklasse X\_A hat keine größtes Element: Wäre nämlich m das größte  
 Element von X\_A, so würde nach Definition ein Element a \in A mit m < a   
 existieren. Dann wäre jedoch (m + a)/2 auch in X\_A wegen (m + a)/2 < a, und  
 damit wäre m nicht das größte Element von X\_A.

Damit ist \Q = X\_A \cup Y\_A ein Dedekind’scher Schnitt, der eine reelle Zahl M\_0 darstellt. Wir zeigen, dass diese genau die gewünschten Eigenschaften hat. Sei

a \in A beliebig, dargestellt durch den Dedekind’schen Schnitt

Y\_A = \{ x \in \Q | a \le x \} = Menge der rationalen oberen Schranken von \{ a \},

X\_A = \Q – Y\_A. Weil \{ a \} \subset A, gilt offenbar Y\_A \subset Y\_A; nach Definition der Ordnungsrelation folgt a \le M\_0.

Sei nun \epsiilon > 0 beliebig. Es existiert ein a \in A mit M\_0 – a < \epsilon, denn sonst wäre M\_0 – a \ge \epsilon \forall a \Leftrightarrow a \le M\_0 - \epsilon \forall a, was keine obere Schranke von A sein kann. Es wäre noch zu zeigen, dass M\_0 eindeutig ist. Wir verzichten darauf aus Zeitgründen, da es nicht schwer ist.

</beweis>

Ab dieser Stelle werden wir nicht mehr mit den Dedekind’schen Schnitten arbeiten, sondern mit den Körperaxiomen sowie der Infimums- und Supremumseigenschaft von \R. Als erstes wollen wir uns überlegen, dass die reellen Zahlen noch die besondere Eigenschaft haben, ein archimedischer Körper zu sein, d.h. es gilt das archimedische Axiom:

(AA) Für alle x > 0, y \in \R gibt es eine natürliche Zahl n so, dass y < nx.

Das archimedische Axiom ist für uns so natürlich, dass es schwer fällt, sich in Anwendungen bewusst zu sein, dass man es anwendet. Für x = 1 besagt es nichts anderes, als dass es zu jeder reellen Zahl eine natürliche Zahl gibt, die größer ist. Für \R kann man das archimedische Axiom natürlich aus der Konstruktion über Dedekind’sche Schnitte herleiten. Stattdessen zeigen wir, wie man es aus der Supremumseigenschaft bekommt:

**Beweis von (AA).** Seien x > 0, y \in R gegeben; betrachte

A := \{nx | n \in \N \}.

Wäre (AA) falsch, so wäre y eine obere Schranke von A, und die Supremumseigenschaft impliziert die Existenz einer kleinsten oberen Schranke von

A \in \R, die wir \alpha nennen wollen. Wegen x > 0 ist \alpha – x < \alpha,

d.h. \alpha – x ist keine obere Schranke von A. Daher muss es eine natürliche Zahl m geben mit \alpha – x < mx. Dann ist aber \alpha < (m + 1)x und somit \alpha doch keine obere Schranke von A, Widerspruch.

</beweis>

Hier noch ein paar Anwendungen des archimedischen Axioms:

**<korollar> Korollar 1.**

(1) Zu jedem \epsilon existiert ein n\_0 mit der Eigenschaft 1/n < \epsilon für alle n \ge n\_0.

(2) Sind x < y zwei reelle Zahlen, so gibt es ein q \in \Q mit x < q < y

(„Dichtheit von \Q“).

(3) Zu jedem a \in \R und \epsilon > 0 existieren rationale Zahlen q\_1, q\_2 \in \Q mit q\_1 < a < q\_2 und q\_2 – q\_1 < \epsilon.

</korollar>

</Seite 32><Seite 33>

**<beweis> Beweis.**

(1) Mit x = 1 und y = 1 / \epsilon existiert nach dem archimedischen Axiom ein n\_0

mit n\_0 > 1 / \epsilon, also ist für jedes n \ge n\_0: 1/n \le 1/n\_0 < \epsilon.

(2) Aus x < y folgt y – x > 0, nach (AA) existiert also ein n \in \N mit

n(y – x) > 1. Weiterhin liefert (AA) die Existenz von m\_1, m\_2 \in \N mit

m\_1 > nx, m\_2 > - nx (das Vorzeichen von x ist unbekannt). Damit ist

-m\_2 < nx < m\_1 und es existiert ein m \in \Z mit -m\_2 \le m \le m\_1 derart, dass

m – 1 \le nx < m. Kombiniert man diese Ungleichungen, so erhält man

nx < m \le 1 + nx < ny. Wegen n > 0 folgt also x < m/n < y.

(3) Betrachte die drei reellen Zahlen

a – \epsilon/3 < a < a + \epsilon/3 und wende (2) zweimal an: dies liefert   
 rationale Zahlen q\_1, q\_2 mit

a – \epsilon/3 < q\_1 < a und a < q\_2 < a + \epsilon/3,

also ist q\_1 < a < q\_2 und

q\_2 – q\_1 < a + \epsilon/3 – (a – \epsilon/3) = 2\epsilon/3 < \epsilon.

</beweis>

Reelle Zahlen kann man potenzieren

x^1 := x, x^2 := x\*x, x^3 := x\*x\*x, …

und setzen x^0 := 1. Gilt zudem x \not= 0 , so setzen wir

x^{-1} := 1/x, x^{-2} := 1/x \* 1/x, …

Damit ist also für 0 \not= x \in \R und jede ganze Zahl k \in \Z die Potenz x^k wohldefiniert und es gilt x^k \* x^l = x^{k+l} für k, l \in \Z. Aus positiven Zahlen kann man die k-te Wurzel ziehen, d.h. es gilt: Ist x > 0 eine positive reelle Zahl und k > 0 eine natürliche Zahl, so existiert genau eine positive reelle Zahl y mit y^k = x. Diese Zahl y schreibt man y = \sqrt [k] {x} und nennt sie die k-te Wurzel von x.

**<satz> Satz 2.** Seien k und l zwei natürliche Zahlen. Dann ist \sqrt [l] {k} genau dann eine rationale Zahl, falls k die l-te Potenz einer natürlichen Zahl ist (k = m^l, m \in \N). </satz>

Beispiele: \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt {5},\sqrt{6}… sowie

\sqrt [3] {2}, \sqrt [3] {3}, \sqrt [3] {4}, \sqrt [3] {5} … sind irrationale Zahlen.

**<beweis>**Ist k = m^l mit m \in \N, so folgt \sqrt [l] {k} = m \in \N. Damit ist

\sqrt [l] {k} eine ganze Zahl, also erst recht eine rationale Zahl.

Sei \sqrt [l] {k} eine rationale Zahl. Wir stellen diese dar als \sqrt [l] {k} = m/n,

m, n > 0, ggT(m, n) = 1.Dann folgt kn^l = m^l. Zu zeigen ist n = 1. Angenommen,

n > 1. Dann existiert eine Primzahl p mit p|n *(Anmerkung: p|n heißt: p teilt n.)* und

p > 1. Dann folgt p|kn^l, also p|m^l. Daraus folgt p|m, also p|n und p|m, p > 1, im Widerspruch zu ggT(m, n) = 1.

</beweis>

Mitunter benötigt man die sog. Gauß-Klammer, so etwa im folgenden Argument. Deswegen nutzen wir die Gelegenheit, sie hier einzuführen.

**<definition> Definition 2.** Die Gauß-Klammer [ ]: \R \rightarrow \Z ist definiert als

[x] := \max \{ k \in \Z | k \le x \}.

</definition>

Für positives x ist dies also die größte natürliche Zahl, die kleiner oder gleich x ist – also einfach der ganze Anteil von x. Bei negativen Zahlen ist Vorsicht geboten, denn nach Definition ist [-\pi] = - 4 und nicht -3.

**Potenzen mit reellen Exponenten a^x.** Sei a > 0 eine positive reelle Zahl. Wir haben bereits a^k für jede ganze Zahl k \in \Z definiert und es gilt:

a^k\*a^l = a^{k+l}, a^{kl} = (a^k)^l.

Ist nun q = m/n eine rationale Zahl, so definieren wir a^q := (\sqrt [n] {a})^m. Leicht prüft man wieder nach, dass dann die gleichen Rechenregeln gelten. Wir wollen nun a^x für eine beliebige reelle Zahl definieren. Ist a \ge 1, so betrachten wir die Menge

A(a,x) := \{ a^q: q \in \Q, q \le x \}.

</Seite 33><Seite 34>

Wir zeigen: Die Menge A(a,x) ist (für a \ge 1) von oben beschränkt. In der Tat, ist

q \le x, so folgt q \le [x] + 1 und wegen a \ge 1 erhalten wir a^q \le a^{[x] + 1}. Damit ist A(a,x) durch a^{[x]+1} beschränkt. Wir setzen jetzt

a^x := sup A(a,x) = sup \{a^q: q \in \Q, q \le x \} für a \ge 1.

Ist dagegen a \le 1, so definieren wir a^x := (1/a)^{-x}.

**<satz> Satz 3.**

(1) Ist x = m/n eine rationale Zahl, so stimmen die alte und die neue Definition von

a^x überein.

(2) Es gilt: a^x\*a^y = a^{x+y}, a^{xy} = (a^x)^y.

(3) Gilt x < y, so ist \left{ a^x < a^y für a > 1 \\

a^x > a^y für 0 < a <1 \right.

(4) Gilt a < b, so ist \left{ a^x < b^x für x > 0 \\

a^x > b^x für x < 0 \right.

</satz>

Der Beweis wird in den Übungsaufgaben gegeben. Wir besprechen nun eine wichtige Folgerung aus der Infimums- und Supremumseigenschaft von \R, das sogenannte Intervallschachtelungsprinzip.

**<satz> Satz 4** (Intervallschachtelungsprinzip)**.** Sei eine Folge abgeschlossener Intervalle [a\_n, b\_n] gegeben mit folgenden Eigenschaften:

(1) Jedes Intervall ist im vorherigen Intervall enthalten,

[a\_1, b\_1] \supset [a\_2, b\_2] \supset …, d.h. die reellen Zahlenfolgen

a\_1, a\_2, … und b\_1, b\_2, … sind monoton, genauer:

a\_1 \le a\_2 \le a\_3 …, b\_1 \ge b\_2 \ge b\_3 …

(2) Die Länge des Intervalls [a\_n, b\_n] erfüllt 0 \le b\_n – a\_n \le 1/(2^n).

Dann besteht der Durchschnitt dieser Intervalle aus genau einer reellen Zahl \alpha, \bigcap\_{n=1}^\infty [a\_n, b\_n] = \{ a \}.

</satz>

**<beweis>**Wir betrachten die Mengen

A = \{ a\_1, a\_2, a\_3, … \}, B = \{ b\_1, b\_2, b\_3, … \}.

Beide Mengen sind von oben durch b\_1, von unten durch a\_1 beschränkt. Damit existieren \alpha := \sup A, \beta := \inf B. Weil a\_n \le b\_n \forall n, gilt zunächst

\alpha \le \beta. Wäre aber \alpha \not= \beta, dann existiert wegen (2) ein n mit

b\_n – a\_n < (\beta - \alpha)/3. Hierfür gibt es drei mögliche Lagebeziehungen:

*Beschreibung: Die Lagebeziehungen werden mit Hilfe je eines Zahlenstrahls veranschaulicht, auf dem jeweils das Intervall [\alpha, \beta] markiert ist.*

*In Bild (1) liegt das Intervall [a\_n, b\_n] vollständig im Intervall [\alpha, \beta].*

*In Bild (2) ist die linke Intervallgrenze a\_n = \alpha, die rechte liegt im Intervall*

*[alpha, \beta].*

*In Bild (3) liegt die linke Intervallgrenze a\_n links von \alpha, die rechte liegt im Intervall [\alpha, \beta].*

Wenn [a\_n, b\_n] \subset [\alpha, \beta] (Bild (1) oder (2)), ist wegen der Längenbeziehung der Intervalle entweder \alpha < a\_n oder b\_n < \beta, im Widerspruch zur Infimums- bzw. Supremumseigenschaft dieser Zahl. Überschneiden sich die beiden Intervalle, etwa \alpha \in [a\_n, b\_n] (Bild (3)), dann ist wieder

b\_n < \beta, \beta kann also nicht das Infimum von B sein. Insgesamt ist also

\alpha = \beta. Nach Konstruktion ist aber a\_n \le \alpha \le b\_n \forall n, d.h. \alpha ist in jedem Intervall [a\_n, b\_n] enthalten. Dann liegt es auch im Durchschnitt. Eine weitere Zahl \gamma \not= \alpha kann nicht ebenfalls im Durchschnitt liegen, denn dann wäre |\alpha - \beta| := \epsilon > 0 und man findet wieder ein hinreichend kurzes Intervall [a\_n, b\_n], das entweder \alpha oder \gamma nicht enthält. Damit besteht der Durchschnitt aus genau einer Zahl.

</beweis>

</Seite 34><Seite 35>

In der Analysis fordert man statt der Bedingung (2), dass die Längen der Intervalle gegen Null konvergieren sollen. Das ist im Wesentlichen äquivalent, doch wollten wir hier bewusst die Verwendung dieses Begriffs vermeiden. In der Analysis-Vorlesung wird man später allgemeinere Varianten dieses Satzes kennen lernen.

*Cartoon:*

*Kleiner Junge:* HELP ME FIGURE OUT THIS HOME WORK PROBLEM, HOBBES.

WHAT’S 3 + 8 ?

*Tiger (schreibt):* OK. ASSIGN THE ANSWER A VALUE OF ’X’. ’X’ ALWAYS MEANS

MULTIPLY. SO TAKE THE NUMERATOR (THAT’S LATIN FOR

’NUMBER EIGHTER’) AND PUT THAT ON THE OTHER SIDE OF

THE EQUATION.

THAT LEAVES YOU WITH THREE ON THIS SIDE. SO WHAT

TIMES THREE EQUALS EIGHT? THE ANSWER OF COURSE, IS

SIX.

*Kleiner Junge:* GOSH; I MUST HAVE DONE ALL THE OTHERS WRONG.

*Tiger:* THESE PROBLEMS SEEM AWFULLY ADVANCED FOR FIRST GRADE, IF

YOU ASK ME.

## 3.2. Bedeutende Ungleichungen zwischen reellen Zahlen

Es gibt viele bedeutende Ungleichungen zwischen Zahlen, die an den verschiedensten Stellen der Mathematik auf oft überraschende Weise verwendet werden. Sie gehören deswegen zum Standardrüstzeug der Mathematik.

**<satz> Satz 5** (Bernoulli’sche Ungleichung)**.** Für jede reelle Zahl x \ge -1 undn \in \N gilt: (1 + x)^n \ge 1 + nx.

</satz>

**<beweis>**Wir beweisen die Bernoulli’sche Ungleichung mittels vollständiger Induktion. Für n = 1 besteht zwischen der linken und der rechten Seite Gleichheit, die Aussage ist also richtig. Gelte die Aussage für n. Nach Voraussetzung ist 1 + x \ge 0, also folgt aus (1 + x)^n \ge 1 + nx sofort (1 + x)^{n+1} \ge (1 + nx)\*(1 + x). Aber

(1 + nx)\*(1 + x) = 1 + (n + 1)x + nx^2 \ge 1 + (n + 1)x, was den Beweis beendet.

</beweis>

**<definition> Definition 3.** Wir betrachten jetzt ein n-Tupel a = (a\_1, …, a\_n) positiver reeller Zahlen und definieren folgende Mittel:

H\_n(a) := \frac {n} {1/a\_1 + … + 1/a\_n} „harmonisches Mittel“

G\_n(a) := \sqrt [n] {a\_1\*…\*a\_n} „geometrisches Mittel“

A\_n(a) := (a\_1 +…+a\_n)/n „arithmetisches Mittel“

Q\_n(a) := \sqrt {(a\_1^2 + …+a\_n^2)/n} „quadratisches Mittel“

</definition>

Die Interpretation dieser Mittel diskutieren wir später.

**<satz> Satz 6.** Ist a = (a\_1,…, a\_n) ein n-Tupel positiver reeller Zahlen, so gilt:

\min(a\_1,…, a\_n) \le H\_n(a) \le G\_n(a) \le A\_n(a) \le Q\_n(a) \le \max(a\_1,…, a\_n). </satz>

**<beweis>** Wir beweisen die Ungleichungen nacheinander.

**(1) Beweis von** \min(a\_1,…, a\_n) \le H\_n(a). Wir ordnen die Zahlen a\_1,…, a\_n so an, dass 0 < a\_1 \le … \le a\_n gilt. Dann ist min(a\_1,…, a\_n) = a\_1 und

1/a\_i \le 1/a\_1 für alle i = 1,…, n.

Daraus folgt 1/a\_1 + …+ 1/a\_n \le n/a\_1 und somit

H\_n(a) = \frac {n} {1/a\_1 +…+ 1/a\_n} \ge n/ (n/a\_1) = a\_1 = \min(a\_1,…,a\_n).

</Seite 35><Seite 36>

**(2) Beweis von** G\_n(a) \le A\_n(a). Wir führen den Beweis per Induktion nach n. Für

n = 1 gilt G\_1(a) = a\_1, A\_1(a) = a\_1 und damit G\_1(a) \le A\_1(a). Gelte nun die Ungleichung für n -1, d.h. für a’ = (a\_1,…, a\_{n-1}) sei G\_{n-1}(a’) \le A\_{n-1}(a’). Ist nun ein n-Tupel (a\_1,…, a\_n) gegeben, so bilden wir das (n-1)-Tupel a’ = (a\_1,… a\_{n-1}). Auf Grund der Induktionsannahme genügt es,

(\ast) n(A\_n(a) – G\_n(a)) \ge (n – 1) (A\_{n-1}(a’) – G\_{n-1}(a’))

zu zeigen. Dazu beginnen wir zunächst mit der Identität

x^n –nx + n – 1 = (x – 1) (x^{n-1} + x^{n-2} +… + x – n +1)

Für x > 1 bzw. 0< x <1 gilt, dass beide Faktoren auf der rechten Seite positiv bzw. negativ sind. Also ist x^n + n -1 \ge nx für alle x \ge 0 und n \ge 1. In diese Ungleichung setzen wir

x = G\_n(a)/ G\_{n-1}(a’)

ein und erhalten

(\ast \ast) [G\_n(a)/G\_{n-1}(a’)]^n \ge n\*G\_n(a)/G\_{n-1}(a’) – n + 1.

Nun gilt jedoch

(\ast \ast \ast) A\_n(a) = G\_{n-1}(a’)/n \*[(n -1)\*A\_{n-1}(a’)/G\_{n-1}(a’) +

+(G\_n(a)/G\_{n-1}(a’))^n],

was wir durch einfaches Nachrechnen der rechten Seite überprüfen:

G\_{n-1}(a’)/n \* [(n-1)\*A\_{n-1}(a’)/G\_{n-1}(a’) + (G\_n(a)/G\_{n-1}(a’))^n] =

= (n-1)/n\*A\_{n-1}(a’) + \frac {G\_n^n(a)} {n\*G\_{n-1}^{n-1}(a’)}

= \frac {n-1} {n}\* \frac {a\_1 +…+a\_{n-1}} {n-1} +

+ \frac {a\_1\*…\*a\_n} {n\*a\_1\*…a\_{n-1}}

= (a\_1 + … +a\_n)/n = A\_n(a).

Damit folgt aus (\ast \ast) und (\ast \ast \ast)

A\_n(a) \ge G\_{n-1}(a’)/n \* [(n-1) \* A\_{n-1}(a’)/G\_{n-1}(a’) +

+ n\*G\_n(a)/G\_{n-1}(a’) – n + 1]

\ge (n-1)/n \* A\_{n-1}(a’) + G\_n(a) – (n-1)/n \* G\_{n-1}(a’)

und damit A\_n(a) – G\_n(a) \ge (n-1)/n \* [A\_{n-1}(a’) – G\_{n-1}(a’)]

wie behauptet.

**(3) Beweis von** H\_n(a) \le G\_n(a). Diese Ungleichung ist zu der soeben bewiesenen äquivalent. Zu dem n-Tupel (a\_1,…,a\_n) betrachten wird das neue n-Tupel

\tilde{a} = (1/a\_1,…, 1/a\_n). Wir wissen bereits, dass

G\_n(\tilde{a}) \le A\_n(\tilde{a}), d.h.

\sqrt [n] {1/a\_1\*…\*1/a\_n} \le 1/n \* [1/a\_1 +…+1/a\_n].

Daraus folgt

n/(1/a\_1 +…+1/a\_n) \le \sqrt [n]{a\_1\*…\*a\_n},

also H\_n(a) \le G\_n(a).

**(4) Beweis von** A\_n(a) \le Q\_n(a). Zunächst gilt für alle Zahlen x, y \in \R:

2xy \le x^2 + y^2, weil (x – y)^2 \ge 0. Daraus folgt

(a\_1 +…+a\_n)^2 = a\_1^2 + …+a\_n^2 + 2a\_1a\_2 + …+ 2a\_{n-1}a\_n \le

\le n(a\_1^2 +…+a\_n^2)

</Seite 36><Seite 37>

und somit

(a\_1 +…+a\_n)/n \le \sqrt{(a\_1^2+…+a\_n^2)/n}, also

A\_n(a) \le Q\_n(a).

**(5) Beweis von** Q\_n(a) \le \max(a\_1,…, a\_n). Wir ordnen die Zahlen wieder so an, dass 0 < a\_1 \le a\_2 \le…\le a\_n, dann folgt sofort

Q\_n(a) = \sqrt{(a\_1^2 +…+ a\_n^2)/n} \le \sqrt/{(na\_n^2)/n} = a\_n =

= \max(a\_1,…, a\_n).

</beweis>

Das arithmetische Mittel ist uns am vertrautesten. Eine Interpretation des geometrischen Mittels besprechen wir gleich; auch das quadratische Mittel ist sicher vernünftig, da es zur Länge des Vektors a proportional ist. Eine Interpretation des harmonischen Mittels liefert folgende kleine Denkaufgabe.

**Aufgabe.** Fährt man n Strecken der Länge 1 jeweils mit den

Durchschnittsgeschwindigkeiten a\_1,..., a\_n, so ist die Durchschnittsgeschwindigkeit für die gesamte Strecke genau H\_n(a). Welches Ergebnis bekommt man, wenn man stattdessen n Zeiteinheiten mit den Durchschnittsgeschwindigkeiten a\_1,..., a\_n

fährt, und was besagt also die entsprechende Ungleichung?

Man kann die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel

für zwei positive reelle Zahlen gut an einem rechtwinkligen Dreieck veranschaulichen. Dazu betrachte man 0<x\leq y sowie eine Strecke BC der Länge

x+y und darüber den Halbkreis. Dann zeichne man das rechtwinklige Dreieck \Delta(A,B,C), dessen Lot A' von A auf BC die Strecke BC genau im Verhältnis x zu y schneidet (siehe Bild). Nach dem Höhensatz für rechtwinklige Dreiecke ist die Höhe AA' genau das geometrische Mittel der Teilstrecken x und y, ihr arithmetisches Mittel dagegen der Radius, also die eingezeichnete Strecke m *(Anmerkung: m teilt den Halbkreis in zwei Viertelkreise.)*. Gleichheit liegt genau dann vor, wenn die Höhe gleichzeitig ein Radius ist, also wenn das Dreieck gleichschenklig ist, d.h. wenn x=y ist. Nebenbei erklärt diese Interpretation, warum das geometrische Mittel so heißt -- es ist eine geometrisch motivierte Mittelwertbildung.

## 3.3. Komplexe Zahlen

Die komplexen Zahlen sind eine Erweiterung der reellen Zahlen und entstanden in dem Bestreben, Wurzeln aus negativen reellen Zahlen ziehen zu können. Es ist eine „Erfahrungstatsache“, dass die Gleichung x^2 + 1 = 0 in \R keine Lösung hat. Im Lichte des vorangegangenen Abschnittes wollen wir dies nun sauber beweisen und dabei insbesondere erläutern, dass das Fehlen von Lösungen auf die Existenz der Ordnungsrelation \leq und die Eigenschaften (O1) und (O5) zurückgeführt werden kann.

</Seite 37><Seite 38>

**<lemma> Lemma 1.** Die Gleichung x^2+1=0 hat keine Lösung in \R. </lemma>

**<beweis>**Ist x\in\R, so gilt entweder x\geq 0 oder x\leq 0 (O1).

Im Fall 0\leq x ergibt (O5), dass x\cdot 0\leq x^2, was 1\leq x^2+1 impliziert. Damit kann x^2+1 nicht null sein.

Ist dagegen x\leq 0, dann folgt 0\leq -x und aus (O5):

0\cdot (-x)\leq (-x)\cdot (-x)=x^2. Nun schließt man wie eben.

</beweis>.

Angenommen, es existiert ein (hypothetischer!) kommutativer Körper K, der \R enthält, in dem sich die Addition und Multiplikation "fortsetzen lassen" und der ein Element enthält, nennen wir es i, welches Lösung von x^2+1=0 ist. Weil K ein Körper sein soll, muss es alle Elemente der Form a+ib mit a,b\in\R enthalten, und es muss

für deren Addition und Multiplikation gelten:

(a\_1+ib\_1)+ (a\_2+ib\_2) = a\_1+a\_2 +i(b\_1+b\_2),

(a\_1+ib\_1)\cdot (a\_2+ib\_2) = a\_1a\_2 +ia\_1b\_2+ib\_1a\_2+i^2b\_1b\_2 =

= a\_1 a\_2 -b\_1b\_2 +i(a\_1b\_2+b\_1a\_2).

Wir zeigen nun, dass man auf \R^2 eine solche Körperstruktur definieren kann:

**<definition> Definition 4.** Eine komplexe Zahl ist ein Paar z=(a,b)\in\R^2 zweier reeller Zahlen.

Wir addieren und multiplizieren komplexe Zahlen nach folgenden Regeln:

z\_1+z\_2 = (a\_1,b\_1)+(a\_2,b\_2) = (a\_1 +a\_2, b\_1+b\_2),

z\_1\cdot z\_2 = (a\_1,b\_1)\cdot (a\_2,b\_2) = (a\_1a\_2-b\_1b\_2,a\_1b\_2+a\_2b\_1).

Die Menge aller komplexer Zahlen nennen wir \C.

</definition>

Der Beweis des Lemmas sagt uns, dass auf den komplexen Zahlen keine Ordnungsrelation mit zu \R analogen Eigenschaften existieren kann.

**<satz> Satz 7.** Addition und Multiplikation machen die komplexen Zahlen \C zu einem Körper. </satz>

Die komplexe Zahl (a,0) bezeichnen wir einfach mit a. Die komplexe Zahl (0,1) bezeichnen wir mit i. Dann gilt

i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1, also i^2=-1.

Ist zudem z=(a,b) eine beliebige komplexe Zahl, so haben wir

z = (a,b) = (a,0)+(0,b) = (a,0)+(b,0)(0,1) = a+bi,

d.h. z=a+bi.

**<definition> Definition 5.** Den Betrag einer komplexen Zahl z=(a,b)=a+bi definieren wir durch |z| := \sqrt{a^2+b^2}. </definition>

**<lemma> Lemma 2.** Der Betrag hat die Eigenschaften

|z\_1z\_2| = |z\_1|\cdot |z\_2|, |z\_1+z\_2| \leq |z\_1|+|z\_2|. </lemma>

**<beweis>**Sei z\_1=a\_1+b\_1i, z\_2 = a\_2+b\_2 i. Dann ist

z\_1z\_2 = (a\_1a\_2-b\_1b\_2)+(a\_1b\_2 + a\_2 b\_1) i,

also

|z\_1z\_2|^2 = (a\_1a\_2 - b\_1b\_2)^2 + (a\_1b\_2 + a\_2 b\_1)^2

= (a\_1^2a\_2^2 - 2a\_1 a\_2 b\_1b\_2 + b\_1^2b\_2^2) +

+ (a\_1^2b\_2^2 + 2 a\_1a\_2b\_1b\_2 + a\_2^2b\_1^2) =

= a\_1^2(a\_2^2 + b\_2^2) + b\_1^2(a\_2^2 + b\_2^2) =

= (a\_1^2 + b\_1^2)(a\_2^2 + b\_2^2) = |z\_1|\cdot |z\_2|.

Für die zweite Ungleichung ist zunächst

|z\_1+z\_2|^2 = (a\_1+a\_2)^2 + (b\_1+b\_2)^2 =

= a\_1^2+a\_2^2+b\_1^2+b\_2^2+2a\_1a\_2+2b\_1b\_2.

Aus 2xy\leq x^2+y^2 folgt mit x=a\_1b\_2, y=a\_2b\_1:

2 a\_1 a\_2 b\_1 b\_2 \leq a\_1^2b\_2^2+a\_2^2b\_1^2.

</Seite 38><Seite 39>

Durch Addition gleicher Terme ist dies äquivalent zu

a\_1^2a\_2^2+2 a\_1 a\_2 b\_1 b\_2+b\_1^2b\_2^2 \leq

\leq a\_1^2a\_2^2+b\_1^2b\_2^2+a\_1^2b\_2^2+a\_2^2b\_1^2,

was man umformen kann zu

(\ast) (a\_1a\_2+b\_1b\_2)^2 \leq (a\_1^2+b\_1^2)(a\_2^2+b\_2^2) = |z\_1|^2|z\_2|^2.

Damit kann man |z\_1+z\_2|^2 wie folgt abschätzen:

|z\_1+z\_2|^2 = a\_1^2+a\_2^2+b\_1^2+b\_2^2+2a\_1a\_2+2b\_1b\_2 \leq

\leq |z\_1|^2+|z\_2|^2+2|a\_1a\_2+b\_1b\_2| \leq

\leq |z\_1|^2+|z\_2|^2+2 |z\_1|\cdot |z\_2| = (|z\_1|+|z\_2|)^2.

</beweis>

Seien a,b positive Zahlen mit 0<a<b. Wir wollen die Menge M := \{z\in\C : a< |z|<b\}

näher beschreiben. Offenbar liegen die Punkte von M zwischen den Kurven, die |z|=a bzw. |z|=b erfüllen. Ist z=x+iy, so gilt |z|=\sqrt{x^2+y^2}, also ist

|z|=b \Lra |z|^2 = b^2 \Lra x^2+y^2 = b^2, d.h. z liegt auf dem Kreis vom Radius b.

Insgesamt ist M ein Kreisring ohne die beiden begrenzenden Kreise (linkes Bild).

*Beschreibung der Bilder, die konzentrische Kreise zeigen:*

*Linkes Bild von innen nach außen: weißer Kreis mit Radius a, grauer Kreisring M mit Innenradius a und Außenradius b.*

*Rechtes Bild von innen nach außen: weißer Kreis mit Radius a’, grauer Kreisring M’ mit Innenradius a’ und Außenradius b’, weißer Kreisring mit Innenradius b’ und Außenradius a, grauer Kreisring mit Innenradius a und Außenradius b. Ein Punkt z in M ist geradlinig mit einem Punkt z’ in M’ verbunden.*

Sind 0<a'<b' zwei weitere positive Zahlen und betrachten wir die Punkte z'\in\C, die a'<|z'|<b' erfüllen, so liegen auch diese Punkte in einem Kreisring M' (rechtes Bild). Geometrisch ist damit klar, dass man an den Abstand zwischen z\in M und z'\in M' genau dann von unten abschätzen kann, wenn diese beiden Kreisringe sich nicht überschneiden, falls also a-b'>0 (M' liegt ganz im weißen "Inneren" von M) oder

a'-b>0 (M liegt im ganz im weißen "Inneren" von M') gilt. Auf der anderen Seite kann der Abstand von z zu z' nie größer als b+b' werden. Da der Abstand von z zu z'

genau die Zahl |z-z'| ist, haben wir damit bewiesen:

0<a<|z|<b und 0<a'<|z'|<b' \Ra \max(0, a'-b,a-b')< |z-z'|< b +b'.

Abschätzungen dieser Art benötigt man oft für komplexe Zahlen.

**<definition> Definition 6.** Ist z=(a,b)=a+bi eine komplexe Zahl, so heißt (*sprich: z quer) \*bar{z}=(a,-b)=a-bi die zu z konjugierte komplexe Zahl. </definition>

Offenbar gilt:

z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2-b^2i^2 = a^2+b^2 = |z|^2.

Daraus folgt übrigens für z\neq 0, dass z\bar{z} / |z|^2=1, d.h.

z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} oder

(a+ib)^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} f"ur z=a+ib\neq 0.

</Seite39><Seite 40>

**Aufgabe 3.1.** Man überlege sich, dass die Bedingung (a,b)(x,y)=1 für (a,b)\neq (0,0)

auf \R^2 zu einem linearen Gleichungssystem für x und y äquivalent ist und genau

die eben genannte Lösung hat. Was ist die Determinante dieses linearen

Gleichungssystems?

Weiterhin ist z+\bar{z} immer eine reelle Zahl; wir nennen \Re z = a den Realteil von z und \Im z = b den Imaginärteil von z. Es ist

z+\bar{z} = 2\Re z, z-\bar{z} = 2 i \Im z.

Komplexe Zahlen lassen sich geometrisch sehr gut interpretieren. Identifizieren wir z=(a,b) mit dem Vektor in \R^2 mit Koordinaten (a,b), so ist |z| genau die Länge dieses Vektors:

*Beschreibung der Zeichnung: Im 1. Quadranten eines Koordinatensystems ist ein Punkt z mit Koordinaten (a, b) markiert und mit dem Ursprung verbunden. Die Länge dieser Strecke ist |z|. Der Winkel, den diese Strecke mit der x-Achse einschließt wird mit \phi bezeichnet.*

Es gilt also \cos\phi = \frac{a}{|z|}, \sin\phi = \frac{b}{|z|}, und deswegen ist

z = |z|(\cos\vphi + i\sin\vphi).

Dies ist die sog. trigonometrische Schreibweise einer komplexen Zahl.

Der Winkel \phi heißt Argument der komplexen Zahl z, \arg z =\phi.

Sind z=\cos\phi + i\sin\phi, z'=\cos\phi' + i\sin\phi' zwei reelle Zahlen vom Betrag eins, so gilt für deren Produkt

z\cdot z' = (\cos\phi + i\sin\phi)(\cos\phi' + i\sin\phi') =

= \cos\phi\cos\phi' - \sin\phi\sin\phi'+i(\cos\phi\sin\phi'+

+ \cos\phi'\sin\phi) =

= \cos(\phi+\phi')+i\sin(\phi+\phi').

Die Multiplikation der komplexen Zahlen entspricht also einfach die Addition der Winkel! Ohne Mühe folgert man aus dieser Identität zudem

\arg (z\cdot z') = \arg z+\arg z' \mod 2\pi, *(sprich: modulo 2\pi)*

\arg\bar{z} = -\arg z \mod 2\pi.

Ist \vphi=\vphi' und iteriert man die obige Rechnung, so folgt sofort die bemerkenswerte Formel

(\cos\phi+i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i \sin n\phi.

**<bemerkung> Bemerkung 1.** In der Analysis-Vorlesung wird die bekannte Exponentialfunktion auf die komplexen Zahlen ausgedehnt und es wird bewiesen, dass

e^{ix} = \cos x + i\sin x \forall x\in\R gilt.

Deswegen wird mitunter auch diese Tatsache als trigonometrische Schreibweise komplexer Zahlen bezeichnet.

</bemerkung>

**<beispiel> Beispiel 2.** Was ist [-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}]^{2011}? Zwar kann man (a+ib)^n über den binomischen Lehrsatz ausrechnen (vgl. Lemma 6, Kapitel 4), aber da dies in diesem Fall 2011 Summanden ergibt, ist das wenig erbaulich, auch wenn sie sich drastisch vereinfachen. Sehr viel besser ist folgender Weg:

Für jedes z=|z|(\cos\phi + i\sin\phi) ist z^n=|z|^n(\cos n\phi + i \sin n\phi). Man prüft, dass die Zahl z\_0:= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} den Betrag eins hat, und \theta=2\pi/3. Also ist z\_0^3=1 und

z\_0^{2011} = z\_0^{3\cdot 670+1} = z\_0 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.

</beispiel>

</Seite 40><Seite 41>

**<beispiel> Beispiel 3.** Wir bestimmendie Lösungen der Gleichung z^n = 1, diese werden oft n-te Einheitswurzeln genannt. Zunächst folgt |z|=1, z lässt sich also schreiben in der Form z=\cos\phi+i\sin\phi. Damit ist z^n=1 äquivalent zu \cos n\phi=1, \sin n\phi = 0. Es muss also n\phi =2k\pi sein (k\in\Z), also \phi = 2k\pi/n und die Lösungen sind

z\_k := \cos \frac{2k\pi}{n}+ i\sin \frac{2k\pi}{n}, k=0,1,..., n-1.

Wir halten fest: Die Lösungen der Gleichung z^n=1 sind die n Ecken eines regulären n-Ecks, von dem eine Ecke in 1\in\R liegt. Weil die Gleichung reelle Koeffizienten hat, ist mit jedem z auch \bar{z} eine Lösung: Die Lösungen liegen symmetrisch an der x-Achse gespiegelt. Zum Beispiel hat die Gleichung z^3=1 die drei Lösungen

z\_1 = \cos 0+i\sin 0 = 1,

z\_2 = \cos \frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},

z\_3 = \bar{z}\_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.

Das Beispiel illustriert sehr gut, dass die Wahl der "richtigen" Darstellung der Zahl z (trigonometrisch oder als Paar z=a+ib) das Problem entscheidend vereinfachen kann. </beispiel>

Die ganze Elementargeometrie der Ebene lässt sich mit Hilfe komplexer Zahlen leicht beschreiben. Zum Beispiel ist

(1) die Translation um z\_0 die Addition f(z)=z+z\_0

(2) die Drehung um den Winkel \theta die Multiplikation f(z)=(\cos\theta+i \sin\theta)z

(3) die Spiegelung an der x-Achse die Konjugation f(z)=\bar{z}.

**<bemerkung> Bemerkung 2.** Es ist wichtig zu verstehen, dass es keinen echten Unterschied zwischen \R^2 und \C gibt - das Paar (x,y) ist identisch mit der komplexen Zahl x+iy. Es gibt höchstens einen Unterschied in den Eigenschaften, die man hervorheben möchte: Mit \C ist gewöhnlich der Gedanke verbunden, dass man komplexe Zahlen miteinander multiplizieren kann, wohingegen \R^2 als Spezialfall eines \R^n zunächst einen reellen Vektorraum meint, auf dem es also nur eine Addition und eine Skalarmultiplikation gibt.

<abbildung> Cartoon:

Kleiner Junge: Here’s another math problem I can’t figure out. What’s 9 + 4?

Tiger: Ooh, That’s a tricky one. You have to use calculus and imaginary numbers for this.

Kleiner Junge: IMAGINARY NUMBERS?!

Tiger: You know. Eleventeen, thirty-twelve … and all those. It’s a little confusing at first.

Kleiner Junge: How did YOU learn all this? You’ve never even gone to school!

Tiger: Instinct. Tigers are born with it.

</abbildung>

</bemerkung>

Aus der linearen Algebra ist der Vektorraum \R^n bekannt. Analog ist \C^n ein komplexer n-dimensionaler Vektorraum mit dem Skalarprodukt und der Norm (z=(z\_1,..., z\_n), w=(w\_1,..., w\_n))

\langle z,w \rangle := \sum\_{i=1}^n z\_i \bar{w\_i},

|z| = \sqrt{\langle z,z\rangle }.

Sie haben die Eigenschaften (\lambda\in\C)

(1) \langle z,w\rangle =\overline{\langle w,z\rangle}

</Seite 41><Seite 42>

(2) \langle \lambda z,w\rangle =\lambda \langle z,w\rangle =

= \langle z,\bar{\lambda}w\rangle

(3) |z|=0 \Lra z=0

(4) |\lambda\cdot z| = |\lambda|\cdot |z|, |z+w|\leq |z|+|w|

(5) |z-w|\leq |z-v|+|v-w| (Dreiecksungleichung)

**<satz> Satz** 8 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)**.** Für beliebige komplexe Zahlen

a\_1,..., a\_n,b\_1,..., b\_n gilt

| \sum\_{j=1}^n a\_j b\_j| \leq \sqrt{\sum\_{j=1}^n |a\_j|^2}

\cdot \sqrt{\sum\_{j=1}^n |b\_j|^2}.

</satz>

**<beweis>** Wir beginnen den Beweis mit einer elementaren Feststellung:

Für festes a,b>0 und beliebiges t>0 gilt immer

2ab \leq t^2a^2+b^2/t^2,

und Gleichheit tritt genau dann auf, falls t^2=b/a gilt. Die Aussage ergibt sich sofort, wenn man bedenkt, dass sie zu (ta - b/t)^2\geq 0 "aquivalent ist. Nun beachten wir, dass

| \sum\_{j=1}^n a\_j b\_j| \leq \sum\_{j=1}^n |a\_j|\cdot |b\_j|

gilt, so dass man sich auf Zahlen mit a\_j, b\_j\geq 0 beschränken kann. Da zudem

a\_j b\_j=0 ist, wenn einer der beiden Faktoren verschwindet, ist nur der Fall a\_j>0 und b\_j>0 von Interesse. Nach der Vorbetrachtung gilt dann

2a\_jb\_j \leq t^2a\_j^2+b\_j^2/t^2.

Summiert man von j=1 bis j=n, erhält man

2\sum\_{j=1}^n a\_jb\_j \leq t^2 \sum\_{j=1}^n a\_j^2+\frac{1}{t^2}\sum\_{j=1}^nb\_j^2

für alle t>0. Setzt man A:=\sum\_{j=1}^n a\_j^2, B:= \sum\_{j=1}^n b\_j^2, so ist die rechte Seite gleich t^2A+B/t^2. Die Vorbetrachtung liefert, dass dieser Ausdruck minimal wird bei t^2=\sqrt{B/A} und dann den Wert 2\sqrt{AB} annimmt. Dies beendet den Beweis.

</beweis>

Für das zuvor eingeführte Skalarprodukt auf \C^n bedeutet dies einfach

|\langle z,w\rangle| \leq |z|\cdot |w| \forall z,w\in\C^n.

Wir beenden den Abschnitt mit einer ausgesprochen wichtigen Summenformel. Sie gilt für alle komplexen Zahlen.

**<lemma> Lemma 3** (Geometrische Summe)**.** Für jedes z\in\C-\{1\}, n\in\N gilt:

\sum\_{i=0}^n z^i = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}. </lemma>

**<beweis>**Ein Induktionsbeweis ist natürlich möglich. Man kann aber auch eleganter vorgehen und explizit

(1-z)\sum\_{i=0}^n z^i = (1-z)(1+z+...+z^n) = 1+z+...+z^n - z(1+z+...+z^{n-1}+z^n)

ausrechnen, dann sieht man sofort, dass auf der rechten Seite nur 1-z^{n+1}

übrig bleibt, alle anderen Terme kürzen sich weg.

</beweis>

So einfach der Beweis ist, so vielfältig sind die Anwendungen. Ist etwa z reell und vom Betrag <1, so zeigt man in der Analysis, dass der Limes n\ra\infty existiert. Auf diese Weise entsteht die sogenannte geometrische Reihe.

**<beispiel> Beispiel 4.** Ist zum Beispiel z eine n-te Einheitswurzel, also z^n=1, dann

folgt die bemerkenswerte Identität

1+z+z^2+...+z^{n-1} = 0.

</beispiel>

</Seite 42><Seite 43>

Und noch ein ganz praktisches Beispiel:

**<beispiel> Beispiel 5 (**Zinsrechnung)**.** Ein sparsamer Mathematik-Student zahlt am Anfang jeden Jahres bei der Bank z,- \euro ein, die Zinsen liegen konstant bei \epsilon \% und er hebt nichts von seinem Geld ab. Wie viel Geld hat er am Ende des n-ten Jahres?

Die ersten z,- \euro werden n Jahre lang verzinst, was am Ende inkl. Zinseszins z\cdot (1,0\epsilon)^n \euro ergibt (sofern \epsilon einstellig ist, was derzeit eine realistische Annahme ist, sonst ohne Null).

Das im zweiten Jahr eingezahlte Geld wird nur n-1 Jahre verzinst usw., also

z\cdot (1,0\epsilon)^n+z\cdot (1,0\epsilon)^{n-1}+...+z\cdot (1,0\epsilon)^{1} =

= z \cdot (1,0\epsilon)\sum\_{k=0}^{n-1}(1,0\epsilon)^k =

= z \cdot (1,0\epsilon)\frac{1-(1,0\epsilon)^n}{0,0\epsilon}

Ist etwa z=2.000,- \euro, \epsilon=5, n=5, dann ergibt dies 11.603,826,- \euro.

Hätte er stattdessen gleich nz=10.000,- \euro für 5 Jahre zu 5 \% angelegt, hätte er am Ende 12.762,82 \euro, also über 1.000,- \euro mehr.

Auch bei Rentenberechnungen gehen analoge Formeln ein - mehr dazu in den Vorlesungen Versicherungs- und Finanzmathematik.

</beispiel>

## 3.4. Exkurs 1: Komplexe Geometrie in der Ebene

Die ebene Geometrie unterscheidet sich von der Geometrie in höheren

Raumdimensionen auch dadurch, dass sich zu ihrer Beschreibung die komplexen

Zahlen verwenden lassen. Das ist nicht nur ein Hilfsmittel zur Vereinfachung von Darstellungen und Rechnungen, sondern es trägt wesentlich zum Reichtum der

zweidimensionalen Geometrie bei. Ziel dieses Abschnitts ist es, die gängigen Transformationen der Ebene als komplexe Abbildungen von \C nach \C zu beschreiben. Wir vereinbaren, komplexe Zahlen mit Kleinbuchstaben a,b,z,... und die ihnen entsprechenden Punkte der Ebene mit den jeweiligen Großbuchstaben A,B,Z,... zu bezeichnen. In diesem Sinne ist z.B. auch A/2 ein wohldefinierter Punkt der Ebene, da er der komplexen Zahl a/2 entspricht. *(Fußnote 2:* Dieser Abschnitt (mit Ausnahme des Cartoons) ist unserem Buch I. Agricola, Th. Friedrich, Elementargeometrie, 3. Auflage Vieweg-Verlag, 2010, entnommen. *Ende der Fußnote 2)*

<abbildung>

Cartoon: FoxTrot by Bill Amend

Mädchen: Why do they make us study math in school? I hate it!

Mutter: Not now, Paige. I’m trying to think.

Mädchen: It’s not like I’m planning to go into astrophysics or something!

Mutter: I need to cut this quiche into five equal pieces.

Mädchen: Give me one example where I’m ever going to use this junk I’m learning in

geometry class! Just one!

Mutter: Let’s see. A fifth of a circle is … is…

Mädchen: Just cut it into 72-Degree wedges and listen to me, mother!

Mutter: Thanks.

Mädchen schaut grimmig.

Mädchen: OK, fine, give me two examples.

Mutter: Oh, wait. Peter wanted his slice twice as big as the others…

*</abbildung>*

</Seite 43><Seite 44>

**<beispiel> Beispiel 6.**

a) f(z)=k\cdot z für k\in\R entspricht der zentrischen Streckung mit Zentrum im

Ursprung und Faktor k.

b) f(z)=z+z\_0 entspricht der Translation um den Vektor z\_0.

c) f(z)= (\cos\theta+ i\sin\theta)\cdot z ist die Drehung um den Ursprung mit

Winkel \theta.

d) Für die Abbildung f(z)=z'=-z+z\_0 gilt (z+z')/2=z\_0/2 d.h. der Punkt Z\_0/2 ist immer der Mittelpunkt der Strecke von Z nach Z'. Damit beschreibt f die Punktspiegelung an Z\_0/2.

</beispiel>

Wir studieren nun ganz allgemein die komplexe Transformation f(z)=az+b, a,b\in\C. Ein Punkt z\_0 ist genau dann Fixpunkt von f, falls (1-a)z\_0 = b gilt. Dies führt auf folgende Fallunterscheidung:

(1) a=1 und b=0: Alle komplexen Zahlen sind Fixpunkte und f ist die identische

Abbildung.

(2) a=1 und b\neq 0: f hat keine Fixpunkte und entspricht der Translation um den   
 Vektor b.

(3) a\neq 1: f hat genau einen Fixpunkt, nämlich z\_0=b/(1-a). Damit kann man f

umschreiben als

f(z)-z\_0 = a(z-z\_0) = |a|\cdot e^{i \cdot \arg(a)}\cdot (z -z\_0) .

In diesem Fall ist f die Superposition einer Drehung um z\_0 und einer zentrischen Streckung mit dem Streckungszentrum z\_0.

**<satz> Satz 9.** Die komplexen Transformationen f(z)=az+b, a,b\in\C entsprechen genau den orientierungserhaltenden Ähnlichkeitstransformationen. Dabei ist f genau dann

(1) eine Translation, falls a=1 gilt;

(2) eine nichttriviale zentrische Streckung, falls a reell und verschieden von Eins ist;

(3) eine nichttriviale Drehung, falls |a|=1 und verschieden von Eins ist.

</satz>

**<beispiel> Beispiel 7.** Die komplexe Transformation f(z)=az mit a=\frac{4}{5}e^{i\pi/6} ist eine Drehstreckung um den Nullpunkt mit Winkel \pi/6 und Streckfaktor 4/5.

Iteriert man diese Abbildung, d.h. betrachtet man f,f^2,f^3,..., so bewegt sich z auf einer logarithmischen Spirale um den Ursprung, die im Limes im Ursprung endet. Besonders anschaulich ist dies, wenn man nicht nur die Bilder eines Punktes, sondern eines Objektes (hier: eines Dreiecks, siehe Bild) betrachtet.

*<abbildung> Beschreibung des Bildes: In der komplexen Ebene ist ein Dreieck mit den Eckpunkten (2|0), (3|0) und (2,5|1) dargestellt. Das erste Bilddreieck ist etwas kleiner und liegt relativ zum Ausgangsdreieck weiter links und weiter oben im 1. Quadranten.*

*Im 1. Quadranten liegt auch noch das zweite Bilddreieck (kleiner, weiter links, etwa gleiche Höhe). Im 2. Quadranten folgen die nächsten 3 Bilder (jeweils kleiner, jeweils tiefer liegend als der Vorgänger, zunächst weiter links, dann etwa gleich bleibend). Im 3.Quadranten folgen die Bilder 6 bis 8 (jeweils kleiner, jeweils weiter rechts, zunächst tiefer, dann etwa gleich bleibend). Im 4. Quadranten folgen die Bilder 9 bis 11 (jeweils kleiner, jeweils höher, zunächst weiter rechts, dann etwa gleich bleibend.*

*Alle Bilddreiecke rücken immer näher an den Ursprung, in dessen Nähe im*

*1. Quadranten zwei ganz kleine Dreiecke zu erkennen sind. </abbildung>*

</beispiel>

Die Vermutung liegt nun nahe, dass die komplexen Transformationen vom Typ f(z)=a\bar{z}+b genau den orientierungsumkehrenden Ähnlichkeitstransformationen entsprechen. Zunächst ist klar, dass es sich um die Komposition einer orientierungserhaltenden Ähnlichkeitstransformation mit der Spiegelung

z\mapsto \bar{z} an der x-Achse handelt, also in der Tat um eine negativ orientierte Ähnlichkeitstransformation. Betrachte sodann z\_1,z\_2\in\C mit den Bildern z\_1',z\_2' unter f. Eine

</Seite 44><Seite 45>

Abbildung f wird Isometrie oder abstandserhaltend genannt, falls

|z\_2-z\_1|=|z\_2'-z\_1'| gilt, was in diesem Fall genau dann gilt, wenn |a|=1 ist.

Weiterhin ist eine negativ orientierte Isometrie genau dann eine Spiegelung, falls

f^2=Id ist, was auf die Bedingung a\bar{b}+b=0 führt. Gilt dagegen |a|\neq 1, so hat f genau einen Fixpunkt, nämlich die Zahl z\_0=(a\bar{b}+b)/(1-|a|^2), und man kann f umschreiben als

f(z)-z\_0 = a(\bar{z}-\bar{z}\_0) = |a|\cdot e^{i \cdot \arg(a)}\cdot (\bar{z} -\bar{z}\_0) .

Dies erkennt man als die Komposition der Spiegelung

z\mapsto e^{i\arg(a)}(\bar{z} -\bar{z}\_0})+z\_0 (man prüft sofort, ob a\bar{b}+b=0 gilt) mit der zentrischen Streckung um den Faktor |a|. Zusammenfassend halten wir fest:

**<satz> Satz 10.** Die komplexen Transformationen f(z)=a\bar{z}+b, a,b\in\C entsprechen

genau den orientierungsumkehrenden Ähnlichkeitstransformationen. Dabei ist f

genau dann

(1) eine Isometrie, falls |a|=1 gilt und eine Spiegelung, falls a\bar{b}+b=0 gilt;

(2) die Verknüpfung einer zentrische Streckung h mit einer Spiegelung s, falls |a|\neq 1 ist.

Im zweiten Fall ist das Zentrum von h der Punkt der komplexen Zahl z\_0= (a\bar{b}+b)/(1-|a|^2), der Streckfaktor von h ist |a|, und die Spiegelungsachse von s verläuft durch z\_0.

</satz>

Wir demonstrieren die Nützlichkeit dieses Zugangs zur ebenen Geometrie am Beispiel eines berühmten Satzes, der mitunter Napol\'eon Bonaparte zugeschrieben wird. Wir beginnen mit einer Charakterisierung gleichseitiger Dreiecke, die auch für sich genommen von Interesse ist:

**<lemma> Lemma 4.** Seien a,b,c\in\C die komplexen Zahlen, die den Ecken des Dreiecks

\Delta(A,B,C) entsprechen. Das Dreieck \Delta(A,B,C) ist genau dann gleichseitig, falls eine der Identitäten

a+ b\omega+c\omega^2 = 0 oder

a+ b\bar{\omega}+c\bar{\omega}^2 = 0

gilt, wobei \omega=e^{2i\pi/3} ist. </lemma>

**<beweis>**Wir nehmen zunächst an, dass das Dreieck \Delta(A,B,C) positiv orientiert sei, d.h. dass die Bezeichnung der Eckpunkte gegen den Uhrzeigersinn läuft. Wenn \Delta(A,B,C) gleichseitig ist, dann entsteht CA aus CB durch Drehung um -\pi/3, während BA aus BC durch Drehung um \pi/3 hervorgeht. Da die Kantenvektoren von

\Delta(A,B,C) den komplexen Zahlen a-b, b-c und c-a entsprechen, erhalten wir

\omega(b-c) = c-a und \omega^2(b-c) = a-b.

Die erste dieser Gleichungen bedeutet a+b\omega+c(-1-\omega)=0, so dass die Identität 1+\omega+\omega^2=0 sofort auf a+ b\omega+c\omega^2 = 0 führt. Die zweite Gleichung ist zur ersten äquivalent.

Falls das ursprüngliche Dreieck \Delta(A,B,C) negativ orientiert ist, erhalten wir analog die Gleichung a+ b\bar{\omega}+c\bar{\omega}^2 = 0 (dabei ist

\bar{\omega} = \omega^2 die andere nicht reelle kubische Einheitswurzel).

Umgekehrt, gelte etwa a+ b\omega+c\omega^2 = 0. Wieder ist

\omega^2=-\omega-1, so dass \omega(b-c)=c-a, und folglich |b-c|=|c-a|. Ähnlich zeigt man |c-a|=|a-b|, was die Gleichseitigkeit beweist. Analog argumentiert man in dem Fall, dass a+ b\bar{\omega}+c\bar{\omega}^2 = 0 gilt.

</beweis>

**<satz> Satz 11 (**Satz von Napol\'eon)**.** Sei \Delta(A,B,C) ein Dreieck, A'',B'',C'' die Schwerpunkte der gleichseitigen Dreiecke über den Seiten AB, BC, AC, die außerhalb des ursprünglichen Dreiecks liegen. Dann ist das Dreieck \Delta(A'',B'',C'') ebenfalls gleichseitig (vgl. Abbildung). </satz>

*<abbildung> Beschreibung der Abbildung auf Seite 46: Lage des spitzwinkligen Dreiecks BCA :*

*B links, C rechts, A oberhalb der Strecke \ol{BC}. Die Punkte B und C werden durch den Punkt A’ zu einem gleichseitigen Dreieck BA’C ergänzt, das außerhalb des Dreiecks BCA liegt. In diesem Dreieck sind alle drei Seitenhalbierenden eingezeichnet und ihr Schnittpunkt mit A’’ bezeichnet. Analog entstehen die gleichseitigen Dreiecke CB’A und BAC’ mit ihren Seitenhalbierenden und deren Schnittpunkte B’’ und C’’. Die Punkte A’’, B’’ und C’’ sind geradlinig verbunden.*

*</abbildung>*

**<beweis>** Wir bezeichnen mit a,b',c''... die komplexen Zahlen, die den Punkten A,B',C''..., entsprechen, und wählen die Orientierungen wie in der Abbildung. Nach dem vorangegangenen Lemma gilt für die positiv orientierten gleichseitigen Dreiecke \Delta(A',C,B), \Delta(B',A,C), und \Delta(C',B,A)

a'+c\omega+b\omega^2 = 0, b'+a\omega+c\omega^2 = 0,

c'+b\omega+a\omega^2 = 0

für \omega=e^{2i\pi/3}. Die Schwerpunkte werden durch die komplexen Zahlen

a'' = \frac{1}{3}(a'+b+c), b'' = \frac{1}{3}(a+b'+c), c'' = \frac{1}{3}(a+b+c')

</Seite 45><Seite 46>

dargestellt, so dass

3(a''+b''\omega+c''\omega^2) = a'+b+c + (a+b'+c)\omega + (a+b+c')\omega^2 =

= a'+c\omega+b\omega^2 + (b'+a\omega+c\omega^2)\omega +

+ c'+b\omega+a\omega^2)\omega^2 = 0.

Dies beweist den Satz für ein positiv orientiertes Dreieck. Der Beweis verläuft analog für ein negativ orientiertes Dreieck, wobei \omega durch \bar{\omega} ersetzt wird.

</beweis>

## 3.5. Exkurs 2: Historische Anmerkungen

**3.5.1. Reelle Zahlen.** Auch wenn schon den Griechen spätestens im 4. Jahrhundert vor Christus die Existenz irrationaler Zahlen bekannt war, kam erst gegen Mitte des 19. Jahrhunderts das Bedürfnis auf, die irrationalen Zahlen mit Hilfe der (vorausgesetzten) rationalen Zahlen zu begründen.

Dies geschah auf zwei unterschiedlichen Wegen. Der eine wurde von Dedekind

beschritten und vollendet; durch die nach ihm benannten "Schnitte" im Bereich rationaler Zahlen werden die irrationalen Zahlen erzeugt. Dedekind konzipierte die Grundideen im Herbst des Jahres 1858 und publizierte deren Durchführung in dem grundlegenden Buch "Stetigkeit und irrationale Zahlen" (1872), das einen Höhepunkt in der Grundlegung der Analysis markiert. Über seine Motive hat er sich rückblickend so geäußert:

Ich befand mich damals [1858]... zum ersten Male in der Lage, die Elemente der Differentialrechnung vortragen zu müssen, und fühlte dabei empfindlicher als jemals früher den Mangel einer wissenschaftlichen Begründung der Arithmetik... Für mich war damals das Gefühl der Unbefriedigung so überwältigend, daß ich den festen Entschluß faßte, so lange nachzudenken, bis ich eine rein arithmetische und völlig strenge Begründung der Infinitesimalanalysis gefunden haben würde.

Einen anderen Weg als Dedekind gingen Cantor, der Begründer der Mengenlehre,

und kurz vor und unabhängig von ihm der Franzose M\'eray um das Jahr 1872.

Im Anschluss an ausführliche Überlegungen, die Weierstraß in seinen Vorlesungen vorgetragen hatte, führte Cantor im Bereich der rationalen Zahlen sog. "Fundamentalreihen" ein (Cantor spricht von "Reihen", wo wir heute "Folgen" sagen würden). Für diese Fundamentalfolgen definierte Cantor Gleichheit und Rechenoperationen. Die Fundamentalfolgen mit rationalem Grenzwert können mit den rationalen Zahlen identifiziert werden; die Fundamentalfolgen ohne rationalen Grenzwert liefern die irrationahlen Zahlen.

</Seite 46><Seite 47>

Die von Cantor gegebene strenge Definition der irrationalen Zahlen ist 1892 von dem Zahlentheoretiker Bachmann in seinen "Vorlesungen über die Theorie der Irrationalzahlen" in der Weise modifiziert worden, dass statt der Fundamentalfolgen Intervallschachtelungen benutzt werden. Selbstverständlich sind alle drei Definitionen der irrationalen Zahlen äquivalent.

**3.5.2. Komplexe Zahlen.** Der italienische Mathematiker Girolamo Cardano (1501-1576) beschrieb 1545 in seinem Hauptwerk "Ars magna" das Lösen kubischer Gleichungen (der Lösungsweg war ihm wohl von Nicolo Tartaglia (1500-1557) mitgeteilt worden). Um eine Gleichung vom Typ x^3 + px +q =0 zu lösen, schrieb er die Unbekannte als Summe zweier Hilfsvariablen - nennen wir sie u und v. Dann bewies er die Beziehung

x^3 = (u+v)^3 = 3uvz + u^3 + v^3.

Wenn es also gelingt, zwei Zahlen u und v derart zu bestimmen, dass 3uv = -p und u^3 + v^3 = -q gilt, so ist die Aufgabe gelöst. Die erste Gleichung ist aber äquivalent zu u^3v^3=-(p/3)^3, so dass u^3 und v^3 nach dem Satz von Vieta insgesamt Lösungen der quadratischen Gleichung

x^2+qx-\frac{p^3}{27} = 0

werden. Diese hat die Lösungen

u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}}, v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}},

wobei D=(q/2)^2+(p/3)^3 die Diskriminante dieser Gleichung ist. Bei den dritten Wurzeln sind alle hierfür in Frage kommenden komplexen Zahlen gemeint, was

auf neun mögliche Wertepaare (u,v) führt; wegen der noch zu erfüllenden Nebenbedingung uv=-p/3 sind es in Wahrheit nur drei. Hat man ein solches Paar (u,v) bestimmt, so kann man die beiden anderen leicht hinschreiben, denn mit den dritten Einheitswurzeln e^{\pm i2\pi/3}= -\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2} lauten

die Lösungen der ursprünglichen Gleichung

x\_1 = u+v, x\_2 = e^{ i2\pi/3}u+ e^{- i2\pi/3}v, x\_3 = e^{- i2\pi/3}u+ e^{i2\pi/3}v.

Je nach Wert der Diskriminante D ist nun die Lösung im Prinzip klar, auch wenn die Rechnungen schnell aufwendig werden.

Cardano (und nach ihm noch konsequenter Rafael Bombelli, 1526-1572) bemerkte nun, dass mitunter selbst reelle Lösungen der ursprünglichen Gleichung nur dann auf diesem Wege hergeleitet werden können, wenn man zwischendurch das Rechnen mit "imaginären" Zahlen zulässt. Bombelli illustrierte diesen Effekt anhand der Gleichung

x^3 -15 x -4 = 0, D = -121 = (11 i)^2.

Gesucht sind also Paare (u,v) mit

u^3 = 2+ 11 i, v^3 = 2-11i, uv = 5.

Schreibt man u und v als a+ib, so sind dies zwei sehr spezielle gekoppelte kubische Gleichungen für a und b, die mehr oder weniger einfach lösbar sind. Man erhält

insgesamt die drei Wertepaare (zeilenweise zu lesen)

*(Bemerkung: \left{ \\ \\ \right. Bedeutet geschweifte Klammer links, die über drei Zeilen geht.)*

u = \left{ 2+i \\

-1+\frac{\sqrt{3}}{2} + i-\sqrt3 - \frac12 \\

-1-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\sqrt3 - \frac12 \right. ,

v = \left{ 2-i \\

-1+\frac{\sqrt{3}}{2} + i\sqrt3 + \frac12 \\

-1-\frac{\sqrt{3}}{2} + i-\sqrt3 + \frac12 \right.

Als Summe x=u+v erhält man dann die drei reellen Lösungen der ursprünglichen Gleichung

x = 4, -2 +\sqrt{3}, -2 -\sqrt{3}.

Damit war die Nützlichkeit der komplexen Zahlen bewiesen. Allerdings war beim rechnerischen Umgang Vorsicht geboten; zum Beispiel glaubte man lange, dass sich die Rechenregel \sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b} auf komplexe Zahlen übertragen würde,

was aber mit i=\sqrt{-1} auf offensichtliche Widersprüche führt:

</Seite 47><Seite 48>

\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{1}=1\neq -1. Aus diesem Grunde wird diese Schreibweise heute vermieden.

Leonhard Euler führte 1732 die trigonometrische Schreibweise komplexer Zahlen ein und bestimmte so die n-ten Einheitswurzeln.

Erst Carl Friedrich Gauß (vgl. die kurzen biographischen Bemerkungen auf S. 34) kam 1831 auf die Idee, die komplexen Zahlen als Punkte in der Ebene darzustellen und verhalf den komplexen Zahlen kraft seiner mathematischen Autorität zur endgültigen Akzeptanz - weswegen man mitunter auch heute noch von der

Gauß'schen Zahlenebene redet. Carl Friedrich Gauß wird wohl der einzige Mathematiker bleiben, der je auf einem deutschen Geldschein abgebildet war...

*(Bild eines 10 DM- Scheins)*

</Seite *48><Seite* 49*>*

## Aufgaben

**Aufgabe 3.2.** Man verwende die trigonometrische Schreibweise der komplexen Zahlen, um die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus zu beweisen. Hinweis:

Was ist e^{i\theta\_1} \cdot e^{i\theta\_2}?

**Aufgabe 3.3.** Auf der Menge

K := \{ r+s\sqrt{2} : r,s\in\Q\}

sind die übliche Addition und Multiplikation reeller Zahlen eindeutig definiert, und auch die Ordnung von \R überträgt sich unmittelbar. Man beweise, dass K

mit dieser Addition, Multiplikation und Ordnung ein geordneter Körper ist.

Hinweis: Insbesondere muss man sich zunächst überlegen, dass die üblichen Rechenoperationen in einem Körper (Summe, Produkt, Inverses, Negatives) nicht aus K heraus führen.

**Aufgabe 3.4.** Man beweise, dass für vier beliebige komplexe Zahlen x,y,z,t\in\C mit

|z|>|t| gilt:

\frac{|x+y|}{|z+t|} \leq \frac{|x|+|y|}{|z| - |t|}.

**Aufgabe 3.5.** Man sagt, dass eine reellwertige Funktion f: I\ra \R (I ein Intervall)

konvex ist, falls für beliebige x<z<x' aus I der Punkt (z,f(z)) oberhalb der Geraden durch (x,f(x)) und (x',f(x')) liegt. Dies ist äquivalent zu der Bedingung

f(\lambda x+ (1-\lambda) x') \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(x') \forall \lambda\in ]0,1[.

f heißt konkav, falls -f konvex ist.

(1) Man zeige, dass für eine konvexe Funktion f und beliebige x\_1,..., x\_n\in I sowie

\lambda\_1,..., \lambda\_n\geq 0 mit \sum\_{i=1}^n\lambda\_i=1 gilt:

f(\lambda\_1 x\_1+...+\lambda\_n x\_n) \leq \lambda\_1 f(x\_1)+...+ \lambda\_n f(x\_n).

(2) f ist genau dann konvex, falls, für jedes a\in I, die Steigung

s\_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}

eine monoton steigende Funktion auf I-\{a\} ist. Man folgere, dass in jedem

inneren Punkt a von I die linksseitige Ableitung f'\_l(a) und die rechtsseitige

Ableitung f'\_r(a) existieren und f'\_l(a)\leq f'\_r(a) erfüllen. Man zeige weiterhin,

dass für zwei innere Punkte a,b\in I gilt:

f'\_l(a) \leq s\_a(b) \leq f'\_r(a).

(3) Man zeige, dass eine auf I einmal differenzierbare Funktion mit monoton

steigender Ableitung konvex ist. Insbesondere ist eine zweimal differenzierbare

Funktion mit f''\geq 0 konvex.

(4) Man zeige, dass die Funktionen

-\log x, x^p, (1+x^p)^{1/p}

für x>0 und p\geq 1 konvex sind. Man folgere daraus unter Verwendung von (1)

nochmals die Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel

sowie die beiden Ungleichungen

Hölder-Ungleichung:

\sum\_{i=1}^n x\_i y\_i \leq

\leq [\sum\_{i=1}^n x\_i^p]^{1/p}\cdot [\sum\_{i=1}^n y\_i^q]^{1/q} \forall

\forall x\_i,y\_i\geq 0, p>1, q=\frac{p-1}{p}

1. Minkowski-Ungleichung:

[\sum\_{i=1}^n x\_i^{1/p}]^{p}+[\sum\_{i=1}^n y\_i^{1/p}]^{p} \leq

\leq [\sum\_{i=1}^n (x\_i +y\_i)^{1/p}]^{p} \forall x\_i,y\_i\geq 0, p\geq1.

</Seite 49><Seite 50>

Zudem zeige man, dass (1-x^{1/p})^{p} für p>1 auf ]0,1[ konvex ist und folgere

daraus die 2. Minkowski-Ungleichung:

[\sum\_{i=1}^n x\_i^p]^{1/p}+[\sum\_{i=1}^n y\_i^p]^{1/p} \geq

\geq [\sum\_{i=1}^n (x\_i +y\_i)^p]^{1/p} \forall x\_i,y\_i\geq 0, p> 1

**Aufgabe 3.6.** Seien A, B beschränkte Mengen nichtnegativer Zahlen. Wir definieren

C = \{ a \cdot b, a \in A, b \in B\}. Beweisen Sie:

\sup (C) = \sup (A) \cdot \sup (B) , \inf (C) = \inf (A) \cdot \inf (B).

Gelten diese Gleichungen auch, wenn A und B beschränkte Mengen beliebiger reeller Zahlen sind?

**Aufgabe 3.7.** A und B seien beschränkte Mengen reeller Zahlen. Wir betrachten

C = \{ a+b, a \in A, b \in B \}. Beweisen Sie:

\sup (C) = \sup (A) + \sup (B), \inf (C) = \inf (A) + \inf (B) .

**Aufgabe 3.8.** Beweisen Sie für a >0 und x,y\in\R:

(1) a^x a^y =a^{x+y} , a^{x \cdot y} = (a^x)^y ;

(2) x <y \Rightarrow \left{ a^x <a^y für a>1 \\

a^x > a^y für a <1 \right .

(3) a <b \Rightarrow \left{ a^x <b^x für x>0 \\

a^x > b^x für x <0 \right. .

**Aufgabe 3.9.**

(1) Man beweise: Für x,y\geq 0 gilt \max(x,y) = \frac{x+y}{2}+\frac{|x-y|}{2}

(2) Auf dem Intervall [a,b] betrachten wir die Funktion

f(p) = \max \{ |p-x| : x \in [a,b]\} , p \in [a,b] .

An welcher Stelle p nimmt die Funktion f(p) ihren minimalen Wert an?

(3) Seien 0<a<b. An welcher Stelle erreicht die Funktion

f(p) = \max \{ \frac{|p-x|}{x}, x \in [a,b] \}

auf [a,b] ihren minimalen Wert?

**Aufgabe 3.10.** Beweisen Sie direkt (also nicht durch vollständige Induktion):

(1) {\frac{x^n}{1+x+x^2+ ... + x^{2n}} \le \frac{1}{2n+1} } für x>0

(2) x\_1 x\_2 + … + x\_{n-1} x\_n \le

\le \binom{n}{2} \cdot \frac{x\_1 + … + x\_n}{n} ^2 für x\_1, ..., x\_n \ge 0

(3) \binom{n}{0}\cdot\binom{n}{1}\cdot...\cdot\binom{n}{n}\leq

\leq [\frac{2^n-2}{n-1}]^{n-1} für n\in\N, n\geq 2

**Aufgabe 3.11.** Beweisen Sie für x\geq -1, n\in\N folgende Verschärfung der

Bernoulli'schen Ungleichung:

(1+nx)^n \geq 1+nx+ \frac{n(n-1)}{2}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3.

**Aufgabe 3.12.** Beweisen Sie auf mindestens zwei verschiedene Weisen:

</Seite 50><Seite 51>

(1) Für n\in\N, n>1 gilt: (\frac{n+1}{2})^n>n!.

(2) Für n\in\N gilt: 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+ ... + \frac{1}{\sqrt{n}} >

>2(\sqrt{n+1} -1 ).

**Aufgabe 3.13.** Man überlege sich, dass |a|\leq |a+b|+|b| für beliebige reelle

Zahlen a,b\in\R gilt und weise damit die Ungleichung ||a| - |b||\leq |a+b| nach.

**Aufgabe 3.14.** ZeigenSie, dass für reelle Zahlen a,b,c,d\geq 0 gilt:

(1) \frac{a}{b}+b\geq 2\sqrt{a} (b>0),

(2) (a+b)^3\leq 4(a^3+b^3),

(3) \sqrt{ac}+\sqrt{bd}\leq \sqrt{(a+b)(c+d)}.

**Aufgabe 3.15.** Zeigen Sie für x\in\R - \{1\}:

\sum\_{k=1}^n kx^k = \frac{x}{x-1}[nx^n - \frac{x^n -1}{x-1}].

**Aufagbe 3.16.** Bestimmen Sie alle Zahlen z\in\C, die folgende Ungleichungen erfüllen:

(1) |z-2|\geq 10,

(2) |z|> |z+1|,

(3) |2z-1|<|z-1|.

Welche reellen Zahlen erfüllen insbesondere die jeweiligen Ungleichungen?

**Aufgabe 3.17.** Bestimmen Sie

(1) alle komplexen Zahlen mit \bar{z}=z^2.

(2) alle komplexen Zahlen, für die \frac{1+z}{1-z} reell ist,

(3) alle komplexen Zahlen, für die \frac{1+z}{1-z} rein imaginär ist.

**Aufgabe 3.18.** Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichungen

(1) z^3=i,

(2) z^2= 3-4i,

(3) |z|-z = 1+2i.

**Aufgabe 3.19.** Beschreiben Sie die folgenden Mengen:

(1) \{z\in\C : |z-i|+ |z+i|<4\},

(2) \{z\in\C : \Re (1/z)< 1/2\},

(3) \{z\in\C : |z| > 1-\Re z\},

(4) \{z\in\C : |z^2-1|<1\}.

**Aufgabe 3.20.**

(1) Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in der Form a+ib dar:

\frac{2}{1-3i} , ( 1+ \sqrt{3} i )^6 , ( \frac{1+ \sqrt{3}i}{1-i} )^4 .

(2) Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in trigonometrischer Form dar:

- \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i , \frac{1-i}{1+i} , (-4+3i)^3

</Seite 51><Seite 52>

**Aufgabe 3.21.** Berechnen Sie [\frac{1}{2}+ i\frac{\sqrt3}{2}]^{2010}.

**Aufgabe 3.22.** Beweisen Sie: Drei komplexe Zahlen z\_1,z\_2,z\_3 in der Ebene sind genau dann die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks, wenn sie die Gleichung

z\_1^2+z\_2^2+z\_3^2 = z\_1z\_2+z\_1z\_3+z\_2z\_3

erfüllen**.** Hinweis: man kann die Aufgabe erheblich vereinfachen, wenn man zuerst

beweist, dass die Gleichung unter Translationen, Rotationen und Streckungen invariant ist.

**Aufgabe 3.23.** Sei f die Transformation der Ebene, die der komplexen Zahl z

den Punkt f(z)=z\cdot |z| zuordnet.

a) Man bestimme und konstruiere die Fixpunktmenge von f.

b) Man löse für eine gegebene komplexe Zahl a die Gleichung z\cdot |z|=a und

folgere, dass f bijektiv ist.

c) Man bestimme das Bild unter f des Kreises \K(0,r) um den Ursprung mit Radius r.

d) Man bestimme das Bild unter f der Geraden durch 0 mit Richtungsvektor

(\cos\alpha,\sin\alpha), wobei \alpha aus [0,2\pi] ist.

**Aufgabe 3.24.** Sei \C die komplexe Zahlenebene mit Ursprung O; \vec{u} und \vec{v} seien die Vektoren, die den Punkten 1 und i entsprechen. Wir betrachten die Abbildung

T(z)=-i\bar{z}+1.

(1) Man zeige, dass T\circ T eine Translation ist, und beschreibe sie näher.

(2) Sei t die Translation um den Vektor (\vec{u}-\vec{v})/2. Man zeige, dass

T\circ t^{-1}=t^{-1}\circ T =: s eine Isometrie mit einer Fixpunktgeraden (also eine

Achsenspiegelung) ist. Man folgere T=s\circ t=t\circ s.

(3) Sei t' die Translation um den Vektor \vec{u}, r die Drehung um den Mittelpunkt O

mit Winkel -\pi/2 und s\_x die Spiegelung an der x-Achse. Man zeige

T=t'\circ r\circ s\_x und folgere, dass T=t'\circ s' ist, wobei s' eine Spiegelung an

einer näher zu beschreibenden Geraden ist.

(4) Was ist s\circ s'? Man beschreibe, was dies geometrisch für die Fixpunktgeraden

von s und s' bedeutet.

**Aufgabe 3.25.** Seien A\neq B und M Punkte der komplexen Ebene, die durch die komplexen Zahlen a,b und m dargestellt werden. Sei M\_1 das Bild von M unter

der Drehung r\_1=r\_{(A,\theta)} und M\_2 das Bild von M unter der Drehung r\_2=r\_{(B,\theta')}.

a) Man beweise, dass der Mittelpunkt M' der Strecke M\_1M\_2 der komplexen Zahl

m' = \frac{e^{i\theta}+e^{i\theta'}}{2}m+\frac{a(1-e^{i\theta}) + b(1-e^{i\theta'})}{2}

entspricht.

b) Wie muss man \theta und \theta' wählen, damit es (bei beliebigem M!) eine

Drehung r gibt, die M in M' transformiert? Man beschreibe r.

c) Wie muss man \theta und \theta' wählen, damit M' unabhängig von M ist? Wenn

dies der Fall ist, so bezeichne \Omega den Mittelpunkt von AB. Man beschreibe

\overrightarrow{\Omega M'} in Abhängigkeit von \overrightarrow{\Omega M}.

d) Man folgere den geometrischen Ort von M', falls \theta variiert und \theta' fest

gewählt ist.

**Aufgabe 3.26. Regelmäßiges Fünfeck**

Ziel dieser Aufgabe ist die Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks mit Zirkel und Lineal. Sei \omega\_1=e^{2i\pi/5} die primitive fünfte Einheitswurzel.

a) Man begründe (am besten ohne Rechnung), warum

1+\omega\_1+ \omega\_1^2+\omega\_1^3+\omega\_1^4=0 gilt.

</Seite 52><Seite 53>

b) Man schreibe eine quadratische Gleichung auf, deren Lösungen genau

\alpha:=\omega\_1+\omega\_1^4 und \beta:=\omega\_1^2+\omega\_1^3 sind, und

folgere:

\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} und

\cos \frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}.

*(Die sich hier befindende Abbildung wird in Aufgabenteil c) beschrieben.)*

c) Wir betrachten das regelmäßige Fünfeck mit den Ecken A, M, N, P und Q,

*(Bemerkung: Der Kreis um den Ursprung, auf dem diese Punkte liegen, ist*

*eingezeichnet. Punkt A hat die Koordinaten (1|0)*.) entsprechend den

komplexen Zahlen 1,\omega\_1,\omega\_1^2,\omega\_1^3,\omega\_1^4. Sei

H der Schnittpunkt der x-Achse mit der Geraden G(M,Q) und K der Schnittpunkt

der x-Achse mit der Geraden G(N,P). *(Bemerkung: Die Stecke MQ ist gestrichelt,*

*die Strecke NP durchgehend eingezeichnet. Beide Strecken schneiden die x-*

*Achse senkrecht.)* Sei weiterhin \Omega der Punkt, der der komplexen Zahl -1/2

entspricht, B der Punkt, der der komplexen Zahl i entspricht und \mathcal{K} der

Kreis mit Mittelpunkt \Omega durch B. *(Bemerkung: Die Strecke B\Omega ist*

*gestrichelt eingezeichnet.)* Die Schnittpunkte von \mathcal{K} mit der x-Achse

heißen I und J (wobei man I so setze, dass x\_I>x\_J sei). Man zeige:

x\_I\cdot x\_J=-1 und x\_I+ x\_J=-1.

d) Sei O sei der Ursprung. Man folgere, dass

\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OQ} und

\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}

gilt, und dass H der Mittelpunkt von OI sowie K der Mittelpunkt von OJ ist.

e) Man folgere hieraus eine geometrische Anleitung für die Konstruktion eines

regelmäßigen Fünfecks nur mit Zirkel und Lineal. Man fertige eine detaillierte

Skizze mit allen Hilfslinien an!

</Seite 53> <Seite 54>

Seite 54 ist leer

</Seite 54><Seite 55>

# Kapitel 4: Mächtigkeit, Abzählbarkeit

## 4.1. Abzählbare Mengen

In vielen Situationen der Mathematik wie des Alltags möchte man die Größe zweier Mengen vergleichen. Die folgende Definition erlaubt es, dies nicht nur für endliche Mengen, sondern auch für unendliche Mengen zu tun:

**<definition> Definition 1.** Zwei Mengen A und B werden gleichmächtig oder von gleicher Mächtigkeit genannt, falls es eine Bijektion f: A\ra B gibt. </definition>

Die Definition enthält eine scheinbare Asymmetrie: Warum geht f von A nach B und

nicht umgekehrt? Nun, dies ist irrelevant, denn zu jeder Bijektion f: A\ra B gibt es eine Umkehrabbildung f^{-1}: B\ra A, die ebenfalls eine Bijektion ist. Ohne diese Bemerkung wäre die Definition mathematisch nicht sinnvoll.

**<beispiel> Beispiel 1.** Sind A und B zwei Mengen mit endlich vielen Elementen, so gilt dies genau dann, wenn A und B gleich viele Elemente haben: Ist nämlich

A = \{a\_1,a\_2,..., a\_n\}, B = \{b\_1,b\_2,..., b\_m\},

so ist für n=m eine Bijektion leicht hinzuschreiben, etwa f: a\_i\mapsto b\_i. Gilt andererseits n\neq m (z.B. n<m), dann kann es keine Bijektion f: A\ra B geben, denn f(A)\subset B kann nur n Elemente haben, also nicht ganz B umfassen. Man schreibt dann card A = n (für Kardinalität). Offenbar gilt für zwei disjunkte endliche Mengen

A,B: card (A\cup B) = card A + card B.

</beispiel>

Man beachte, dass man bei dieser Definition selbst bei endlich vielen Elementen nicht wissen muss, wie viele Elemente die fragliche Menge enthält. Das ist sehr nützlich, weil die Frage nach der Anzahl Elemente mitunter schwer zu beantworten ist! Bei unendlichen Mengen kann unsere Intuition über die Größe zweier Mengen andererseits irreführend sein. Zum Beispiel kann eine Menge echt in einer anderen enthalten sein und trotzdem gleichmächtig sein! Es gilt etwa:

**<satz> Satz 1.** Die Mengen \N und \Z sind gleichmächtig. </satz>

**<beweis>** Wir konstruieren eine Bijektion f: \N\ra\Z. Es soll 0 auf 0 abgebildet werden, und danach jede Zahl abwechselnd auf die nächste positive / negative ganze Zahl abgebildet werden, etwa so:

0\mapsto 0, 1\mapsto 1, 2\mapsto -1, 3\mapsto 2, 4\mapsto -2...

In Formeln: f(2k)=-k, f(2k+1)=k+1. Dies ist offenbar eine bijektive Abbildung.

</beweis>

Analog zeigt man zum Beispiel, dass \N und p\N gleichmächtig sind, ebenso \N und \N-\{n\}.

**<definition> Definition 2.** Eine Menge X, die die gleiche Mächtigkeit wie \N hat, wird abzählbar unendlich genannt. Dies drückt ziemlich genau die Intuition hinter diesem Begriff aus, denn eine Bijektion f:\N\ra X, i\mapsto x\_i ist genau das, was man unter einer "(unendlichen) Abzählung" der Elemente von X verstehen würde.

</definition>

Mit einer abzählbaren Menge ist meist eine abzählbar unendliche oder eine endliche Menge gemeint, der Sprachgebrauch ist hier aber nicht einheitlich. In diesem Sinne gilt etwa: Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist wieder abzählbar.

</Seite 55><Seite 56>

**<satz> Satz 2.** Die Menge \R der reellen Zahlen ist nicht abzählbar unendlich. </satz>

**<beweis>**Es genügt, für jede Folge reeller Zahlen p\_1,p\_2,... eine reelle Zahl zu finden, die nicht darin vorkommt. Dazu wählen wir für jedes p\_n ein Intervall [a\_n,b\_n] mit

b\_n- a\_n = \frac{1}{3^n}, [a\_n,b\_n]\subset [a\_{n-1}, b\_{n-1}], p\_n\notin [a\_n,b\_n].

Dazu kann man zum Beispiel wie folgt vorgehen: Im Intervall [0,1] wähle man als [a\_1,b\_1] eines der drei Intervalle [0,1/3], [1/3,2/3], [2/3,1], welches a\_1 nicht enthält.

Dieses Intervall unterteile man analog in drei Intervalle der Länge 1/9 und wähle für [a\_2,b\_2] eines, das a\_2 nicht enthält. Die Intervalle [a\_n,b\_n] bilden nach Konstruktion eine Intervallschachtelung, es existiert also eine eindeutige Zahl x\_0 mit

cap\_{n=1}^\infty [a\_n,b\_n] = \{ x\_0\}.

Weil p\_n\notin [a\_n,b\_n] \forall n, kann x\_0 keine der Zahlen p\_n sein.

</beweis>

Unendliche Mengen, die nicht abzählbar unendlich sind, nennt man überabzählbar.

Der Beweis der folgenden einfachen Aussage wird dem Leser als Übungsaufgabe

überlassen.

**<lemma> Lemma 1.** Die Vereinigung zweier abzählbar unendlichen Mengen ist wieder

abzählbar unendlich.

Insbesondere erhält man so nochmals das Ergebnis, dass \Z und \N gleichmächtig sind. Wir wollen nun zeigen, dass \N und \Q gleichmächtig sind.

**<lemma> Lemma 2** (Cantor'sches Diagonalverfahren)**.** Die Menge \Q ist abzählbar unendlich. </lemma>

**<beweis>**Wir zeigen, dass die positiven rationalen Zahlen \Q\_+ und \N gleichmächtig sind, daraus folgt dann die Aussage mit Lemma 1 (durch diese Einschränkung wird die Beweisidee klarer). Es werden alle Brüche m/n, m,n>0 in ein quadratisches

Zahlenschema geschrieben:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1/1 | 1/2 | 1/3 | 1/4 | 1/5 | … |
| 2/1 | 2/2 | 2/3 | 2/4 | 2/5 | … |
| 3/1 | 3/2 | 3/3 | 3/4 | 3/5 | … |
| 4/1 | 4/2 | 4/3 | 4/4 | 4/5 | … |
| 5/1 | 5/2 | 5/3 | 5/4 | 5/5 | … |
| … | … | … | … | … | … |

Sodann streicht man die nicht gekürzten Brüche (rot) und durchläuft die verbliebenen rationalen Zahlen in der angegebenen Reihenfolge.

*(Bemerkung: Von 1/1 ausgehend, eins horizontal nach rechts, entlang der Nebendiagonalen eins nach unten, von dort eins senkrecht nach unten, entlang der Nebendiagonalen ganz nach oben, eins horizontal nach rechts ,…)*

Dies definiert die Folge

a\_1 = 1, a\_2=1/2, a\_3=2, a\_4=3, a\_5=1/3, a\_6=1/4, a\_7=2/3, a\_8=3/2, a\_9=4 ...

Es ist klar, dass auf diese Weise jede positive rationale Zahl genau einmal in der Folge a\_n vorkommt.

</beweis>

Das folgende Korollar verwendet neben dem Cantor'sches Diagonalverfahren

auch noch das Auswahlaxiom -- auf recht subtile Weise.

**<korollar> Korollar 1.** Die Vereinigung S=A\_1\cup A\_2\cup... von abzählbar unendlich vielen abzählbar unendlichen Mengen ist wieder abzählbar unendlich.

</korollar>

</Seite 56><Seite 57>

**<beweis>**Weil jede der Mengen A\_m abzählbar unendlich ist, existiert eine Bijektion

f: \N\ra A\_m. Wir betrachten die Menge aller solcher Bijektionen

B\_m := \{f: \N\ra A\_m | f ist bijektiv}

nach Voraussetzung ist sie nicht leer. Mit der Indexmenge I=\N und X\_i=A\_m ist

B\_m\subset \prod\_{i\in\N} X\_i, und das Auswahlaxiom besagt, dass man ein nicht triviales Element in B\_m auswählen kann (obwohl man es nicht konstruieren kann).

Dies ist also eine Aufzählung

A\_m = \{a\_{m1}, a\_{m2}, a\_{m3},...\}.

Unter Verwendung des Cantor'schen Diagonalverfahrens (ohne Kürzen) kann man die Indizes (m,n) anordnen.

</beweis>

Leider kann man das Cantor'sches Diagonalverfahren nicht ohne weiteres auf Tripel natürlicher Zahlen erweitern -- man müsste die Zahlen im Raum verteilen und acht geben, keine zu vergessen. Einen alternativen Weg beschreibt der folgende Satz.

**<satz> Satz 3.** Das kartesische Produkt endlich vieler abzählbar unendlicher Mengen ist wieder abzählbar unendlich. </satz>

**<beweis>**Die Aufgabe besteht offenbar darin, die n-Tupel natürlicher Zahlen sinnvoll anzuordnen. Wir illustrieren dies für n=3. Gesucht ist also eine Abzählung von \N^3.

Wir verwenden, dass es zu jeder natürlichen Zahl m nur endlich viele Tripel

(p,q,r) (p,q,r\in\N) gibt, deren Summe gleich m ist. Innerhalb der Tripel mit fester Summe wählt man irgendeine Reihenfolge (da es nur endlich viele sind, geht das immer). Zu m=0 gehört nur das Tripel (0,0,0), zu m=1 die drei Tripel (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0). Auf diese Weise erhält man eine Anordnung der Tripel, die etwa wie folgt aussehen kann (ab der zweiten Zeile ist mit +x die Anzahl Tripel gemeint, die nur durch Vertauschungen aus dem vorherigen entstehen):

(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (0,0,2), (0,2,0), (2,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0),

(0,0,3)+2, (0,1,2)+5, (1,1,1),(0,0,4)+2, (0,1,3)+5, (0,2,2)+2, ...

</beweis>

Weil jedes Polynom n-ten Grades durch das n-Tupel seiner Koeffizienten dargestellt werden kann, folgt sofort:

**<korollar> Korollar 2.** Die Menge der Polynome mit rationalen Koeffizienten ist abzählbar. </korollar>

**<definition> Definition 3 (**algebraische und transzendente Zahlen)**.** Eine reelle Zahl x heißt algebraisch, wenn sie Nullstelle eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten ist, anderenfalls heißt sie transzendent. </definition>

Natürlich ist jede Zahl aus \Q algebraisch (m/n löst nx-m=0), aber auch viele irrationale Zahlen sind es (\sqrt{2} löst x^2-2=0). Insbesondere ist die Menge der algebraischen Zahlen wieder abzählbar unendlich. Weil \R aber nicht abzählbar unendlich ist, gibt es viel mehr transzendente als rationale Zahlen. Es ist aber nicht einfach, von einer gegebenen Zahl die Transzendez nachzuweisen. 1873 bewies Charles Hermite, dass e transzendent ist, 1882 bewies Ferdinand von Lindemann die gleiche Aussage für \pi. Immerhin liefert unser Beweis der Überabzählbarkeit von \R

ein mögliches Konstruktionsverfahren für transzendente Zahlen: Man ordne alle algebraischen Zahlen in einer Folge an und konstruiere daraus eine Zahl, die nicht in dieser Folge vorkommt.

## 4.2. Intuitive Kardinalzahlen

Wir verzichten im Rahmen dieser Vorlesung auf eine gründliche Definition der Ordinal- und Kardinalzahlen, da diese uns schnell in die Untiefen der modernen Mengenlehre führen würde. Wir führen die beiden wichtigsten unendlichen Kardinalzahlen ein (an dieser Stelle benötigen wir hebräische Buchstaben, siehe

Anhang A),

\card \N =: \aleph\_0, \card\R =: \aleph\_1.

</Seite 57><Seite 58>

Wir wissen bereits, dass \aleph\_0 < \aleph\_1. Die (klassische) Kontinuumshypothese besagt, dass es keine Menge gibt, deren Mächtigkeit zwischen \aleph\_0 und \aleph\_1 liegt. Kurt Gödel bewies 1938, dass die Kontinuumshypothese zur

Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre mit Auswahlaxiom widerspruchsfrei ist. Um 1963 bewies dann Paul Cohen, dass sich die Kontinuumshypothese auch nicht aus der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre beweisen lässt - kurzum, die klassische Mengenlehre (mit oder ohne Auswahlaxiom) ist von der Kontinuumshypothese unabhängig. Dies ist ein zentrales Beispiel für Gödels ersten Unvollständigkeitssatz.

Cartoon ([www.CartoonStock.com](http://www.CartoonStock.com))

Professor zu Gödel: „Very clever, Gödel – your theory has a built-in disclaimer!“,

Professor zu sich selbst: „Either Gödel has come up with a great new theory, or the

most elaborate excuse in mathematical history for not

finishing something.“

Wir erinnern daran, dass die Potenzmenge einer Menge X definiert war als die Menge, deren Elemente die Teilmengen von X sind. Insbesondere ist immer \emptyset, X \in \wp(X). Jeder Teilmenge A\subset X kann man ihre charakteristische Funktion \chi\_A zuordnen,

\chi\_A(x) = \left{ 1, x\in A \\

0, x\notin A\right..

Sind X,Y beliebige Mengen, so meint man mit Y^X die Menge aller Abbildungen

f: X\ra Y. In diesem Sinne erhalten wir eine Abbildung *(Bemerkung: \lra bzw. \lmapsto bedeuten lange Pfeile)*

c: \wp(X) \lra \{0,1\}^X, A\lmapsto \chi\_A = c(A),

die offenbar bijektiv ist.

**<lemma> Lemma 3.** Für beliebige endliche Mengen X,Y gilt: \card Y^X = \card Y^{\card X} .

Insbesondere gilt für die Potenzmenge einer endlichen Menge:

\card \wp(X) = 2^{\card X}. </lemma>

**<beweis>**Sei \card X=p,\card Y=q. Eine Abbildung f: X\ra Y ist bestimmt durch die Angabe der Bilder (f(x\_1), f(x\_2), ..., f(x\_p))\in Y^p, dem p-fachen kartesischen Produkt von Y mit sich selbst. Diese Zuordnung zwischen Abbildungen und

Elementen ist bijektiv, deswegen gibt es genau soviele Abbildungen wie p-Tupel, das sind genau q^p Stück. Die Aussage über die Mächtigkeit der Potenzmenge folgt unmittelbar aus der Beschreibung über charakteristische Funktionen.

</beweis>

Der folgende Satz von Cantor-Russel zeigt, dass die Potenzmenge immer "viel größer" als die Ausgangsmenge ist. Der Beweis ist ein Paradebeispiel für scharfes logisches Denken - elementar, aber bei weitem nicht trivial.

**<satz> Satz 4 (**Cantor-Russel)**.** Für eine beliebige Menge X gilt:

(1) Es gibt keine surjektive Abbildung s: X\ra \wp(X).

(2) Es gibt keine injektive Abbildung i:\wp(X)\ra X.

</satz>

**<beweis>**Betrachten wir eine beliebige Abbildung f: X\ra \wp(X). Wir zeigen die Existenz eines Elements A\in \wp(X), das nicht im Bild f(X) liegt. Für jedes x\in X ist f(x) eine Teilmenge von X, und wir können definieren

A := \{x\in X: x\notin f(x)\}\in \wp(X).

Wir zeigen, dass A\neq f(x) für alle x\in X, d.h. A liegt nicht im Bild von f. Zum Beweis sei x\in X: Entweder ist dann x\in f(x) oder aber x\notin f(x).

</Seite 58><Seite 59>

Falls x\in f(x), dann ist x\notin A und damit f(x)\not\subset A, was insbesondere

A\neq f(x) bedeutet. Ist dagegen x\notin f(x), dann muss x\in A sein. Es muss dann

A\not\subset f(x) sein, denn A\subset f(x) würde x\in f(x) implizieren, was ein Widerspruch ist. Also ist A\not\subset f(x), was wieder A\neq f(x) bedeutet.

Aussage (2) wird in Aufgabe 4.7 behandelt.

</beweis>

## 4.3. Weitere endliche Zählargumente

**Anzahl Bijektionen.** Seien X und Y endliche Mengen. Gilt \card X\neq \card Y, so kann es keine Bijektion f: X\ra Y geben. Wir setzen also \card X= \card Y=:n voraus. Die Fakultät n! ist per Definition das Produkt n!=1\cdot 2 \cdot...\cdot (n-1)\cdot n.

**<lemma> Lemma 4.** Ist \card X= \card Y=:n<\infty, so gibt es genau n! Bijektionen von X nach Y. </lemma>

**<beweis>**Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion nach n. Für n=1 ist die Aussage klar. Sei die Behauptung nun richtig für Mengen mit n Elementen. Sind nun

Mengen mit n+1 Elementen gegeben,

X = \{x\_1,..., x\_{n+1}\}, Y = \{y\_1,..., y\_{n+1}\},

so definieren wir X\_i=X-\{x\_i\} sowie Y\_i=Y-\{y\_i\}. Sei f: X\ra Y eine Bijektion mit

f(x\_{n+1})=y\_i. Die Einschränkung f|\_{X\_{n+1}}: X\_{n+1}\ra Y\_i ist dann ebenfalls

bijektiv. Umgekehrt kann jede Bijektion

\tilde{f} (*sprich f Schlange)*: X\_{n+1}\ra Y\_i eindeutig zu einer Bijektion f: X\ra Y fortgesetzt werden, indem man einfach

f(x\_j) = \tilde{f}(x\_j) für j\leq n, f(x\_{n+1}) = y\_i

setzt. Nach Induktionsannahme gibt es n! Bijektionen \tilde{f}: X\_{n+1}\ra Y\_i, also auch n! Bijektionen f: X\ra Y mit f(x\_{n+1}) = y\_i. Da es n+1 verschiedene

Wahlmöglichkeiten für y\_i gibt, ergibt dies insgesamt n!(n+1)=(n+1)! Bijektionen

f: X\ra Y.

</beweis>

**Kombinationen.** Sei X eine n-elementige Menge. Wir stellen uns die Aufgabe,

die Zahl \binom{n}{p} von p-elementigen Teilmengen \{x\_1,x\_2,..., x\_p\} aus Elementen von X zu bestimmen. Ist p>n, so kann es eine solche Teilmenge nicht geben, weswegen dann \binom{n}{p}=0 ist. Die Menge aller p-elementigen Teilmengen schreiben wir \wp\_p(X), so dass gilt:

(\ast) \wp\_p(X)\subset \wp (X), \wp(X) = cup\_{p=0}^n \wp\_p(X),

\card \wp\_p(X) =: \binom{n}{p}.

Die Zahl \binom{n}{p} heißt Binomialkoeffizient. Die folgenden Eigenschaften der Binomialkoeffizienten folgen direkt aus der Definition:

**<lemma> Lemma 5.** Die Binomialkoeffizienten erfüllen

(1) \binom{n}{0}=1, \binom{n}{1}=n, \binom{n}{p}=0 für p>n,

(2) \binom{n}{p}=\binom{n}{n-p} für p\leq n,

(3) \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+... + \binom{n}{n} = 2^n,

(4) \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}.

</lemma>

**<beweis>**

Die Eigenschaften (1) sind klar.

Für (2) betrachte man die Abbildung p: \wp\_p(X)\ra \wp\_{n-p}(X), A\mapsto X-A. Sie

ist offenbar bijektiv, weswegen \binom{n}{p}=\binom{n}{n-p} gilt.

(3) ergibt sich aus der Zerlegung (\ast) von \wp(X), wenn man noch bemerkt, dass natürlich \wp\_p(X)\cap \wp\_q(X)=\emptyset für p\neq q und \card \wp(X)=2^n.

Für (4) fixieren wir ein Element a\in X. Eine p-elementige Teilmenge von X enthält entweder a oder eben nicht. Es gibt aber genau \binom{n-1}{p-1} solche Teilmengen, in denen a liegt, und genau \binom{n-1}{p} Teilmengen, in denen a nicht liegt.

</beweis>

Damit ist es möglich, rekursiv eine Formel für die Binomialkoeffizienten herzuleiten. Man überlegt sich leicht, dass

\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}

</Seite 59><Seite 60>

sein muss. Das Pascal'sche Dreieck implementiert die Formel (4) als ein unendlich ausgedehntes Zahlenschema (Leerstellen sind Null zu setzen):

|  |  |
| --- | --- |
| \binom{n-1}{p-1} | + \binom{n-1}{p-1} |
|  | = \binom{n}{p} |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n\p | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 0 | 1 |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 1 | 1 |  |  |  |  |  |  |
| 2 | 1 | 2 | 1 |  |  |  |  |  |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 |  |  |  |  |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 |  |  |  |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 |  |  |
| 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |  |
| 7 | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 |

Die Formel (3) des Lemmas hat folgende wichtige Verallgemeinerung.

**<lemma> Lemma 6.** (Binomischer Lehrsatz)**.** Für a,b\in\C gilt:

(a+b)^n = \sum\_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. </lemma>

**<beweis>**Wir zeigen dies wieder mit einem Induktionsbeweis. Für n=1 ist dies richtig (auch für n=2 wissen wir es, denn das ist eine der binomischen Formeln). Sei die Aussage richtig für n. Dann ist

(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = (a+b) \sum\_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} =

= \sum\_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k}+

+ \sum\_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} =

= \sum\_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{k} b^{n+1-k}+

+ \sum\_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k} b^{n+1-k} =

= \binom{n}{n} a^{n+1} b^{0}+ \sum\_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{k} b^{n+1-k}+

+ \binom{n}{0}a^0 b^{n+1}+\sum\_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{k} b^{n+1-k} =

= a^{n+1} b^{0}+a^0 b^{n+1}+

+ \sum\_{k=1}^n [\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}]a^{k} b^{n+1-k} =

= a^{n+1} b^{0}+a^0 b^{n+1}+\sum\_{k=1}^n \binom{n+1}{k}a^{k} b^{n+1-k} =

= \sum\_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}a^{k} b^{n+1-k}.

</beweis>

**<beispiel> Beispiel 2.** Für a=b=1 ist dies in der Tat das alte Ergebnis (3). Für a=1, b=-1 erhält man die hübsche Formel

0 = \sum\_{k=0}^n (-1)^k\binom{n}{k}, also

\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+... = \binom{n}{1}+\binom{n}{3}+...

</beispiel>

## 4.4. Das Auswahlaxiom und seine Äquivalente

Wir kommen nochmal auf die Behandlung geordneter Mengen zurück, dies waren Mengen mit einer Ordnungsrelation.

**<definition> Definition 4.** Eine geordnete Menge (M,\leq) heißt total geordnet oder linear geordnet, falls je zwei Elemente von M vergleichbar sind. Eine total geordnete Teilmenge einer Menge heißt mitunter Kette. </definition>

**<beispiel> Beispiel 3.** \C mit der lexikographischen Ordnung ist total geordnet. </beispiel>

**<definition> Definition 5.**

Ein Element m der geordneten Menge (M,\leq) heißt minimal, falls es kein x\in M mit x<m gibt.

</Seite 60><Seite 61>

Ein Element m der geordneten Menge (M,\leq) heißt maximal, falls für jedes y\in M aus m\leq y folgt m=y.

Besitzt jede nichtleere Teilmenge N von M ein minimales Element in (N,\leq), so sagt man, dass (M,\leq) der Minimalbedingung genügt.

Eine total geordnete Menge (M,\leq) mit Minimalbedingung heißt wohlgeordnet.

Die geordnete Menge (M,\leq) heißt induktiv geordnet, falls jede total geordnete Teilmenge N\subset M eine obere Schranke besitzt.

</definition>

**<beispiel> Beispiel 4.** \N ist bzgl. der natürlichen Ordnungsrelation wohlgeordnet, \Q dagegen nicht (z.B. hat \Q selbst kein minimales Element). Das Wohlordnungsprinzip von Zermelo besagt, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann (also z.B. auch \R, obwohl man sich das nicht vorstellen kann). Erstaunlicherweise ist diese Aussage zum Auswahlaxiom äquivalent! Wir wollen zunächst aus dem Auswahlaxiom folgende Variante herleiten. </beispiel>

**<satz> Satz 5** (Verallgemeinertes Auswahlaxiom)**.** Jede Menge M besitzt eine verallgemeinerte Auswahlfunktion, d.h. eine Funktion f, die jeder nichtleeren Teilmenge X von M ein Element von X zuordnet:

f(X)\in X \forall \emptyset \neq X\subset M.

</satz>

**<beweis>**Sei F(X) = \{X\}\x X, d.h. die Menge aller Paare (X,x) wobei x\in X. Wir nennen F die Familie aller Mengen F(X), \emptyset \neq X\subset M. Sie besteht aus nichtleeren, disjunkten Mengen. Nach dem Auswahlaxiom besitzt es eine Auswahlfunktion, die nun das gewünschte leistet.

</beweis>

Wir formulieren nun die wichtigsten äquivalenten Fassungen des Auswahlaxioms.

**<satz> Satz 6.** Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) Zu jeder Menge M gibt es mindestens eine verallgemeinerte Auswahlfunktion.

(2) Jede induktiv geordnete Menge besitzt mindestens ein maximales Element

(Lemma von Kuratowski-Zorn).

(3) Jede geordnete Menge besitzt mindestens eine maximale Kette.

(4) Jede Menge kann wohlgeordnet werden (Wohlordnungsprinzip von Zermelo).

</satz>

**<beweis>**Wir wollen nicht alle Äquivalenzen zeigen, aber einige. Für eine vollständige Diskussion dieses Themas verweisen wir auf das sehr lesenswerte Büchlein [**Ker**]. Insbesondere der Beweis (1) \Ra (2) ist etwas schwierig.

(3) \Ra (4): Sei M beliebig und Q die Menge aller Paare (H,\prec), wobei H\subset M und \prec eine Wohlordnungsrelation auf H ist. Wir definieren für Elemente der Menge Q:

(H\_1,\prec\_1) = (H\_2,\prec\_2) \Lra

\Lra H\_1=H\_2 und \prec\_1 stimmt mit \prec\_2 auf H\_1 (=H\_2) überein.

und

(H\_1,\prec\_1) \leq (H\_2,\prec\_2) \Lra

\Lra H\_1\subset H\_2 und \prec\_2 ist eine Fortsetzung von \prec\_1,

d.h. für h,h'\in H gilt h\prec\_1 h' \Ra h\prec\_2 h'.

Man sieht ein, dass Q bzgl. der so definierten Relation \leq eine geordnete Menge ist. Damit folgt die Existenz einer maximalen Kette K in (Q,\leq)

K: ... \leq (H\_\nu,\prec\_\nu)\leq ... (\nu\in I, eine Indexmenge)

Wir setzen

H^{\ast} := cup\_{\nu\in I} H\_\nu, \prec^{\ast} \Lra wedge\_{\nu\in I}\prec\_\nu.

An zweiter Stelle ist gemeint, dass alle Relationen gleichzeitig gelten sollen; da immer eine die Fortsetzung der anderen ist, macht dies Sinn. Insgesamt ist \prec^{\ast} eine Wohlordnung auf H^\\ast}, also gilt (H^{\ast},\prec^{\ast})\in Q. Wir zeigen, dass H^{\ast}=M sein muss. Wäre dies nicht so, so existiert ein

m\in M - H^{\ast}, was man zu H^{\ast} hinzufügt und als größtes Element definiert.

Dadurch entsteht eine wohlgeordnete Menge (H^{\ast\ast},\prec^{\ast\ast})\in Q,

H^{\ast\ast}:=H^{\ast}\cup \{m\}. Aber dann wäre für alle \nu \in I

(H\_\nu,\prec\_\nu) < (H^{\ast\ast},\prec^{\ast\ast}),

</Seite 61><Seite 62>

was der Maximalität der Kette K widersprucht, also muss H^{\ast}=M sein.

(4) \Ra (1): Sei M eine beliebige Menge, nach Voraussetzung kann sie wohlgeordnet werden. Es sei f(H) diejenige Funktion, die jeder nichtleeren Teilmenge H von M das vermöge der auf M eingeführten Wohlordnung erste Element von H zuordnet. Dieses f ist eine verallgemeinerte Auswahlfunktion über M.

</beweis>

**<beispiel> Beispiel 5.** Folgende Situation ist eines der Hauptanwendungsfälle des Lemmas von Kuratowski-Zorn: Sei M eine bzgl. der Inklusion geordnete Menge von Mengen und gelte, dass M die Vereinigung jeder aus Elementen von M bestehenden Kette enthält. Diese Vereinigung ist eine obere Schranke der Kette, nach dem Lemmas von Kuratowski-Zorn besitzt M dann mindestens ein maximales Element.

</beispiel>

Wir diskutieren noch ein einfaches Anwendungsbeispiel. In der linearen Algebra haben Sie gelernt, was ein Ring ist. Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement e. Eine Teilmenge I von R heißt Ideal, falls punktweise I\cdot R\subset I. Trivialerweise ist ganz R immer ein Ideal. Man beachte aber, dass ein echtes Ideal (also mit I\neq R) niemals e enthalten kann, denn wäre e\in I, müsste e\cdot R=R\subset I sein. Ein Ideal J\neq R von R heißt maximal, falls für jedes weitere Ideal I mit J\subset I\subset R gilt, dass entweder I=J oder I=R ist. Intuitiv gesagt: Ein maximales Ideal ist eines, das man nicht mehr zu einem Ideal vergrößern kann, dass noch echt in R enthalten ist.

Um die Begriffe zu verfestigen, kann man an folgendes Beispiel denken: R sei der Polynomring in einer Variablen, R=\C[x], I das Ideal x^2\cdot \C[x] (also die Menge aller Polynome, die mindestens einen Faktor x^2 enthalten). I ist ein Ideal, aber nicht maximal, zum Beispiel ist J:=x\cdot \C[x] ein I echt enthaltendes Ideal.

**<satz> Satz 7.** Jedes echte Ideal I von R ist in einem maximalen Ideal enthalten. </satz>

**<beweis>**Sei I ein echtes Ideal von R, M die Menge aller Ideale J von R, die

I\subset J und e\notin J erfüllen. M ist nicht leer, da I auf jeden Fall darin enthalten ist.

Mittels der Inklusion ist M eine geordnete Menge, ein maximales Element von M wäre also ein Ideal J\_{\max} mit den Eigenschaften

I\subset J\_{\max}, e\notin J\_{\max}, J\in M mit J\_{\max}\subset J \Ra J=J\_{\max}.

Hat man eine Kette von Elementen von M, so liegt deren Vereinigung wieder in M und ist eine obere Schranke dieser Kette, d.h. M ist induktiv geordnet. Nach dem Lemma von Kuratowski-Zorn hat M ein maximales Element J\_{\max}. Wir zeigen noch, dass J\_{\max} ein maximales Ideal ist im zuvor genannten Sinne: Sei I ein Ideal mit J\_{\max}\subset I\subset R. Entweder e\notin I, dann ist aber I\in M und wegen der Maximalität von J\_{\max} dann I=J\_{\max}. Oder aber e\in I, dann muss

I=R sein.

</beweis>

## Aufgaben

**Aufgabe 4.1.** Man zeige, dass durch "X\sim Y\Lra X hat die gleiche Mächtigkeit

wie Y" eine Äquivalenzrelation definiert wird.

**Aufgabe 4.2.** Man beweise Lemma 1: Die Vereinigung zweier abzählbar unendlicher Mengen ist wieder abzählbar unendlich.

**Aufgabe 4.3.** Man beweise, dass es abzählbar unendlich viele Intervalle I\subset\R

mit rationalen Endpunkten gibt.

**Aufgabe 4.4.** Man beweise, dass die Menge aller Folgen, die nur die Werte 0 oder 1

annimmt, überabzählbar ist.

</Seite 62><Seite 63>

**Aufgabe 4.5.** In Hilbert's Hotel kommen am späten Abend abzählbar unendlich viele Busse mit jeweils abzählbar unendlich vielen neuen Gästen an, das Hotel ist aber ausgebucht. Wie hat der Hotelmanager dennoch alle Gäste untergebracht? Wie müsste ein ankommender Bus besetzt sein, der auch den Hotelmanager an die mathematischen Grenzen seiner Aufnahmekapazitäten bringt?

**Aufgabe 4.6.** Man beweise mittels vollständiger Induktion, dass die

Potenzmenge \wp(X) einer n-elementigen Menge genau 2^n Elemente hat.

**Aufgabe 4.7.** Man beweise die zweite Aussage des Satzes von Cantor-Russel

(Satz 4): Es gibt keine injektive Abbildung i:\wp(X)\ra X.

Hinweis: Man betrachte zu einer beliebigen Abbildung f: \wp(X)\ra X die Menge

A := \{ f(Y): Y\subset X und f(Y)\notin Y\}.

**Aufgabe 4.8.** Man zeige folgende Eigenschaften der Binomialkoeffizienten:

(1) \binom{n+1}{k+1} = \sum\_{m=k}^n \binom{m}{k} für n\geq k,

(2) \sum\_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum\_{k=1}^n \binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k},

(3) \sum\_{k=0}^{2n} (-1)^k\binom{2n}{k}^2 = (-1)^n\binom{2n}{n},

(4) \binom{n+1}{k+1} - \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k+1} - \binom{n}{k-1}.

**Aufgabe 4.9.** Man beweise folgende Eigenschaft der Binomialkoeffizienten einmal durch ein kombinatorisches Abzählargument und einmal durch einen geeignet

gewählten Koeffizientenvergleich:

\binom{m+n}{k} = \sum\_{j=0}^k\binom{m}{j}\binom{n}{k-j} .

Insbesondere ergibt sich im Spezialfall n=m=k die einfache Formel

\sum\_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.

**Aufgabe 4.10.** Man beweise durch ein geschicktes Ableitungsargument:

\sum\_{k=0}^n k\binom{n}{k} = n 2^{n-1}.

**Aufgabe 4.11.** Die Fibonacci-Folge ist rekursiv definiert als die Folge

f\_1=f\_2=1, f\_{n+2}=f\_n+f\_{n+1}. Man beweise:

\sum\_{k=0}^n \binom{n-k}{k} = f\_{n+1}.

**Aufgabe 4.12.** Seien M und N endliche Mengen der Kardinalität m bzw. n, n\geq m.

Man beweise, dass es \frac{n!}{(n-m)!} injektive Abbildungen von M nach N gibt.

**Aufgabe 4.13.** Sei X eine endliche Menge der Kardinalität n, A und B Teilmengen der Kardinalitäten a und b. Man bestimme die Anzahl Elemente folgender Teilmengen: A\cap B^c, A^c\cap B^c, A^c\cup B, A^c\cup B^c.

</Seite 63><Seite 64>

**Aufgabe 4.14.** Man beweise, dass die Anzahl ungerader Binomialkoeffizienten

in jeder Zeile des Pascal'schen Dreiecks eine Potenz von 2 ist.

**Aufgabe 4.15.** Sei n gegeben und k zwischen 0 und 2n. Man beweise, dass dann

\binom{2n}{k}\leq \binom{2n}{n}.

Hinweis: Man kann \binom{2n}{k+1}=\frac{2n-k}{k+1}\binom{2n}{k} verwenden oder aber einen Induktionsbeweis mit Aufgabe 4.8., (4) führen.

</Seite 64><Seite 65>

# Kapitel 5: Mathematisches Sammelsurium

## 5.1. Das Wesentliche zu quadratischen Gleichungen

Unter einer quadratischen Gleichung versteht man eine Gleichung der Form

(\ast) ax^2+bx+c = 0, a,b,c\in\C, a\neq 0.

Im Gegensatz zur Schulzeit ist es nicht mehr notwendig, die Koeffizienten als reellwertig vorauszusetzen. Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass eine solche Gleichung immerzwei Nullstellen x\_1,x\_2\in \C hat (falls x\_1=x\_2 gilt,

redet man von einer doppelten Nullstelle). Sind die Koeffizienten a,b,c reell und x\_1\in\C eine Lösung, so sieht man durch Konjugieren der Gleichung (\ast) ein, dass auch \bar{x}\_1 eine Lösung ist. Damit folgt: Die Nullstellen einer quadratischen Gleichung mit reellen Koeffizienten sind entweder beide reell oder zueinander komplex konjugiert.

Durch quadratische Ergänzung sieht man sofortein, dass

x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} = [x+\frac{b}{2a}]^2-\frac{\Delta}{4a^2}

gilt, wobei \Delta:=b^2-4ac\in\C die sog. Diskriminante der quadratischen Gleichung ist. Die binomische Formel x^2-y^2=(x+y)(x-y) liefert damit diese Fallunterscheidung

Falls \Delta=0: x\_1=x\_2=-\frac{b}{2a} ist doppelte Nullstelle der

quadratischen Gleichung (\ast).

Falls \Delta\neq0: die (einfachere) quadratische Hilfsgleichung X^2=\Delta hat

genau zwei Nullstellen \pm X\_0. Hat man diese bestimmt, so sind die   
 Lösungen der quadratischen Gleichung (\ast)

x\_{1,2}= -\frac{b}{2a} \pm \frac{X\_0}{2a}.

In zwei Fällen sind diese Lösungen \pm X\_0 besonders leicht zu finden:

- Falls \Delta>0: X^2=\Delta hat die Lösungen \pm \sqrt{\Delta}, die   
 allgemeine Lösung lautet also

x\_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}.

- Falls \Delta<0: X^2=-|\Delta| hat die Lösungen \pm i\sqrt{|\Delta|}, die

allgemeine Lösung lautet also

x\_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm i \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}.

**<beispiel> Beispiel 1.** Die quadratischeGleichung x^2+3ix+4=0 hat die Diskriminante \Delta=(3i)^2-4^2=-25, die Hilfsgleichung X^2=-25 damit die Lösungen X\_0=\pm 5i. Die allgemeine Lösung ist damit

x\_{1,2} = -\frac{3i}{2}\pm \frac{5i}{2} = i, -4i.

Die Lösungen sind nicht komplex konjugiert; die Diskriminante ist reellwertig, obwohl die ursprüngliche Gleichung komplexe Koeffizienten hatte.

</beispiel>

Wenn b durch zwei teilbar ist, betrachtet man mitunter die etwas anders parametrisierte Gleichung

(\ast\ast) ax^2+2b'x+c = 0, a,b',c\in\C, a\neq 0.

In diesem Fall entscheidet die reduzierte Diskriminante \Delta'=b'^2-ac über die Gestalt der Lösung von (\ast\ast) (offensichtlich ist \Delta=4\Delta', man kürzt also einen gemeinsam Faktor gleich heraus).

</Seite 65><Seite 66>

Im Fall \Delta'>0 erhält man dann etwa die vereinfachte Lösungsformel

x\_{1,2} = -b/a\pm \sqrt{\Delta'}/a.

Oft ist man in der Situation, zwei Zahlen \alpha,\beta\in\C zu suchen, von denen nur die Summe S=\alpha+\beta und das Produkt P=\alpha\beta bekannt ist. Das folgende Lemma beweist man direkt durch Ausmultiplizieren.

**<lemma> Lemma 1** (Vieta)**.** Die Lösungen \alpha,\beta\in\C der quadratischenGleichung x^2 -Sx+P = 0 erfüllen S=\alpha+\beta und P=\alpha\beta. </lemma>

Dieses Ergebnis liefert neben dem direkten Einsetzen einen weiteren Weg, die Richtigkeit einer Lösung zu überpüfen.

## 5.2. Trigonometrie

Eine sorgfältige Behandlung der trigonometrischen Funktionen erfolgt erst in der Analysis bei der Behandlung der komplexen Exponentialfunktion. Unabhängig davon sollten Sie aber schon jetzt die typischen Rechenkünste der Trigonometrie beherrschen, da diese in der Analysis vorausgesetzt werden. Die Aufstellung dieses Abschnitts soll Ihnen deswegen nur als Formelsammlung dienen.

**5.2.1. Formeln für gleiche Winkel**

\cos^2 \alpha +\sin^2 \alpha = 1

1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}

\cos^2 \alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}

\sin^2 \alpha = \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}

**5.2.2. Formeln für negative und verschobene Winkel**

\sin (-\alpha) = -\sin \alpha

\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha

\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha

\cos (-\alpha) = \cos \alpha

\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha

\cos(\pi-\alpha) = - \cos\alpha

\tan (-\alpha) = -\tan \alpha

\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha

\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha

\cot (-\alpha) = -\cot \alpha

\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha

\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha

\sin(\pi/2-\alpha) = \cos\alpha

\sin(\pi/2+\alpha) = \cos\alpha

\cos(\pi/2-\alpha) = \sin\alpha

\cos(\pi/2+\alpha) = -\sin\alpha

\tan(\pi/2-\alpha) = \tan\alpha

\tan(\pi/2+\alpha) = -\cot\alpha

**5.2.3. Additionstheoreme**

\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta

\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta

\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta

\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta

\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}

\tan(\alpha-\beta) & = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}

**5.2.4. Winkelverdoppelungsformeln**

\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha

\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha

\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}

Wenn t:=\tan\frac{\alpha}{2}:

\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}

\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}

\tan \alpha = \frac{2t}{1-t^2}

</Seite 66><Seite 67>

**5.2.5. Linearisierungsformeln**

2 \cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) +\cos(\alpha+\beta)

2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) -\cos(\alpha+\beta)

2 \sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha-\beta) +\sin(\alpha+\beta)

Spezialfall: 2\cos^2 \alpha = 1+\cos (2\alpha)

2\sin^2 \alpha = 1-\cos (2\alpha).

**5.2.6. Transformation von Summen in Produkte**

\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}

\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}

\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}

\sin\alpha- \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}

**5.2.7. Besondere Werte trigonometrischer Funktionen**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| \alpha | 0 | \pi/12 | \pi/8 | \pi/6 |
| \sin\alpha | 0 | (\sqrt{6}- \sqrt{2}/4 | \sqrt{2-\sqrt{2}}/2 | 1/2 |
| \cos\alpha | 1 | (\sqrt{6}+ \sqrt{2})/4 | \sqrt{2+\sqrt{2}}/2 | \sqrt{3}/2 |
| \tan\alpha | 0 | (\sqrt{6}-\sqrt{2}) /(\sqrt{6}+\sqrt{2}) | \sqrt{2-\sqrt{2}} /\sqrt{2+\sqrt{2}} | 1/\sqrt3} |
| \cot\alpha | - | (\sqrt{6}+\sqrt{2})  /(\sqrt{6}-\sqrt{2}) | \sqrt{2+\sqrt{2}}  /\sqrt{2-\sqrt{2}} | \sqrt{3} |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| \alpha | \pi/5 | \pi/4 | \pi/3 | \pi/2 | \pi |
| \sin\alpha | \sqrt{10-2\sqrt{5}}/4 | \sqrt{2}/2 | \sqrt{3}/2 | 1 | 0 |
| \cos\alpha | (\sqrt{5}+1)/4 | \sqrt{2}/2 | 1/2 | 0 | -1 |
| \tan\alpha | sqrt{\10-2\sqrt{5}}/(\sqrt{5}+1) | 1 | \sqrt{3} | - | 0 |
| \cot\alpha | (\sqrt{5}+1)/sqrt{\10-2\sqrt{5}} | 1 | 1/\sqrt{3} | 0 | - |

**5.2.8. Lösungen der trigonometrischen Fundamentalgleichungen**

Gilt \cos f(x)=\cos g(x), so ist entweder f(x)=g(x)+2k\pi für ein k\in\Z oder

f(x)=-g(x)+2l\pi für ein l\in\Z.

Gilt \sin f(x)=\sin g(x), so ist entweder f(x)=g(x)+2k\pi für ein k\in\Z oder

f(x)=\pi-g(x)+2l\pi für ein l\in\Z.

Gilt \tan f(x)=\tan g(x), so ist f(x)=g(x)+k\pi für ein k\in\Z und

f(x), g(x)\neq \frac{\pi}{2}+l\pi, l\in\Z.

## 5.3. Polynomdivision und Partialbruchzerlegung

Eine Funktion f: \K\ra\K (\K ein zunächst beliebiger Körper) heißt ein Polynom vom Grad n, falls es Koeffizienten a\_0,a\_1,...,a\_n\in\K gibt (a\_n\neq 0) gibt, so dass

für alle x\in\K gilt

(\ast) f(x) = a\_0+a\_1x+... a\_nx^n = \sum\_{i=0}^n a\_i x^i.

Streng genommen hat das Nullpolynom f(x)=0 keinen Grad, doch zählt man bei den "Polynomen vom Grad \leq n" das Nullpolynom gewöhnlich mit. Wir schreiben

n= \deg f für den Grad von f. Die Summendarstellung (\ast) ist die gebräuchlichste

für Polynome, doch natürlich wird ebenso durch

g(x) = b\_0(x-b\_1)(x-b\_2)... (x-b\_n), 0\neq b\_0, b\_1,..., b\_n\in\K

ebenso ein Polynom vom Grad n definiert. Um den Funktionswert eines Polynoms in der Summendarstellung (\ast) auszurechnen, benötigt man 2n-1 Multiplikationen und n Additionen.

</Seite 67><Seite 68>

*(Fußnote 1:* William George Horner,geb. 1756 in Bristol, gest. 1837 in Bath. Er war Zeit seines Lebens als Lehrer tätig, seine Ergebnisse zum Horner-Schema publizierte er 1819. Der bekannte chinesische Mathematiker Chu Shih-chieh (1270-1330) hatte dies jedoch schon 500 Jahre früher entdeckt. *Ende der Fußnote 1)*

Das Horner-Schema erlaubt es, den Rechenaufwand auf n Multiplikationen und

n Additionen zu reduzieren (bei günstigeren Rundungsfehlern). Gleichzeitig erlaubt es die Division durch Polynome der Form x-b. Es beruht auf der Beobachtung, dass man das Polynom (\ast) auch geklammert schreiben kann als

(\ast\ast) f(x) = (... (( a\_n x + a\_{n-1})x + a\_{n-2}) x+...+a\_1)x+a\_0.

**<lemma> Lemma 2** (Horner-Schema)**.** Sei f(x) ein Polynom vom Grad n, geschrieben wie in (\ast). Sei b\in\K. Für die rekursiv definierten Zahlen

c\_n = a\_n, c\_{n-1} = c\_nb+ a\_{n-1}, c\_{n-2} = c\_{n-1} b+ a\_{n-2},..., c\_0 = c\_1b+a\_0

gilt: f(b) = c\_0 und f(x) = (x-b)(c\_n x^{n-1} + c\_{n-1}x^{n-2}+... + c\_2 x + c\_1) + f(b). </lemma>

**<beweis>**Die oben gegebene Klammerung (\ast\ast) beweist f(b)=c\_0. Die Zerlegung beweist man durch direktes Nachrechnen.

</beweis>

Per Hand berechnet man die Koeffizienten wie folgt:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | a\_n | a-{n-1} | a-{n-2} | … | a\_1 | a\_0 |
| b |  | c\_nb | c\_{n-1}b | … | c\_2b | c\_1b |
|  | c\_n | c\_{n-1} | c\_{n-2} | … | c\_1 | f(b) |

Man schreibe die Koeffizienten a\_n,a\_{n-1},...,a\_0 wie gezeigt in eine dreizeilige Tabelle, das b steht links zur Erinnerung. Zunächst wird das a\_n=c\_n nach unten übernommen (2.Spalte: von 1. in 3. Zeile), danach c\_n mit dem gemerkten b multipliziert und unter a\_{n-1} geschrieben (3.Spalte, 2. Zeile). Die Elemente c\_nb und a\_{n-1} werden sodann addiert und das Ergebnis in der dritten Spalte, dritten Zeile notiert. Das Verfahren wird bis zum Ende fortgeführt, so dass man die Koeffizienten c\_n und f(b) leicht in der letzten Zeile ablesen kann.

Wir illustrieren das Verfahren an einem Beispiel. Das Polynom

f(x)=6x^6-3x^5+2x^2+4 ist bei x=2 auszuwerten. Man erhält das Horner-Schema

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 6 | -3 | 0 | 0 | 2 | 0 | 4 |
| 2 |  | 12 | 18 | 36 | 72 | 148 | 296 |
|  | 6 | 9 | 18 | 36 | 74 | 148 | 300 |

Dies bedeutet: f(2)=300 und

f(x)=(x-2)(6x^5+9x^4+18x^3+36x^2+74x+148)+300.

Ist insbesondere eine Zahl b\in\K eine Nullstelle von f(x), dann faktorisiert

f(x)=(x-b)g(x) mit einem Polynom g(x), welches von einem Grad niedriger als f ist. Man nennt b eine k-fache Nullstelle von f, falls ein Polynom h(x) existiert, welches eine Faktorisierung f(x)=(x-b)^k h(x) zulässt.

Kennt man eine Nullstelle x\_0 des Polynoms f, so kann man mit dem Horner-Schema

die Faktorisierung herstellen, oder, was dasselbe ist, das ursprüngliche Polynom f durch einen Faktor (x-x\_0) "teilen".

</Seite 68><Seite 69>

**<beispiel> Beispiel 2.** Bei dem Polynom f(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+4 sieht man leicht ein, dass x=1 eine Nullstelle ist. Wir faktorisieren mit dem Horner-Schema:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | -3 | -4 | 4 |
| 1 |  | 1 | 3 | 0 | -4 |
|  | 1 | 3 | 0 | -4 | 0 |

Die letzte Null in der dritten Zeile bestätigt, dass x=1 eine Nullstelle ist. Die Faktorisierung liest man sofort ab, sie lautet f(x)=(x-1)(x^3+3x^2-4 ). Setzt man x=1 in den zweiten Faktor ein, so sieht man, dass dies wieder eine Nullstelle ist. Insgesamt erhält man f(x)=(x-1)^2(x+2)^2: f hat zwei doppelte Nullstellen.

</beispiel>

Will man das Polynom durch ein beliebiges zweites Polynom g(x) teilen, das nun kein Linearfaktor (x-x\_0) ist, so hat man zwei Möglichkeiten:

**1. Weg:** Iteriertes Faktorisieren. Man bestimme die Nullstellen von g, stelle es als Produkt von Linearfaktoren dar und iteriere das Horner'sche Faktorisierungsverfahren. Meist ist die Polynomdivision der erste Schritt der unten beschriebenen Partialbruchzerlegung, für die man die Nullstellen von g ohnehin braucht.

**2. Weg:** Formale Polynomdivision. Diese wird ausgeführt wie beim schriftlichen Dividieren.

Ein Beispiel erläutert am einfachsten, wie dies zu tun ist. Wir wollen die Polynomdivision \frac{x^2}{x^2-2x+1} ausführen.

**1. Weg:** x^2-2x+1=(x-1)^2, man muss also zweimal nach Horner durch x-1 teilen.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 0 | 0 |
| 1 |  | 1 | 1 |
|  | 1 | 1 | 1 |

d.h. x^2 = (x-1)(x+1) +1 oder \frac{x^2}{x-1} = 1+ x+\frac{1}{x-1}.

Im zweiten Schritt muss man nun 1+x durch x-1 teilen, denn dies ist der Polynomanteil des Bruchs. Also

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 1 | 1 |
| 1 |  | 1 |
|  | 1 | 2 |

d.h. x+1 = (x-1)\cdot 1 +2.

Eingesetzt ins vorherige Ergebnis erhält man

\frac{x^2}{x-1} = (x-1)+2 +\frac{1}{x-1}, also

\frac{x^2}{(x-1)^2} = 1 + \frac{2}{x-1}+ \frac{1}{(x-1)^2}.

**2. Weg:** Die formale Polynomdivision benötigt nur einen Schritt:

x^2 + 0\cdot x + 0 : x^2-2x+1 = 1

-x^2 + 2x -1

-------------------------

0 2x -1

\Ra \frac{x^2}{x^2-2x+1} = 1 + \frac{2x-1}{x^2-2x+1}.

In diesem einfachen Beispiel hätte man das Ergebnis natürlich am schnellsten durch kurzes Nachdenken erhalten können:

\frac{x^2}{x^2-2x+1} = \frac{x^2-2x+1 + (2x-1)}{x^2-2x+1} =

= 1 + \frac{2x-1}{x^2-2x+1}.

Dies funktioniert öfter als man denkt...

</Seite 69><Seite 70>

**<definition> Definition 1 (**rationale Funktion)**.** Eine Funktion f heißt rational, falls es Polynome p(x), q(x) ohne gemeinsame Faktoren gibt, für die f(x)=p(x)/q(x) gilt. Die Nullstellen des Nenners q(x) werden Polstellen von f genannt, ihre Ordnung ist gerade die Vielfachheit der entsprechenden Nullstelle. </definition>

**<satz> Satz 1** (Komplexe Partialbruchzerlegung)**.** Jede rationale Funktion f: \C\ra\C besitzt eine eindeutige Darstellung als

f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = r(x)+ \sum\_{i=1}^n\sum\_{j=1}^{r\_i} \frac{a\_{ij}}{(x-x\_i)^j},

wobei gilt:

(1) r(x) ist ein Polynom vom Grad \deg p - \deg q; gilt \deg p < \deg q, so ist dieser Term nicht vorhanden.

(2) x\_1,..., x\_n sind die Polstellen der Vielfachheit r\_1,...,r\_n von f.

(3) a\_{ij} sind komplexe Zahlen.

</satz>

Sind die Polstellen bekannt, so besteht die eigentliche Aufgabe der Partialbruchzerlegung darin, das Polynom r(x) sowie die Koeffizienten a\_{ij} zu bestimmen. Hierfür macht man einen geeigneten Ansatz: für die erste Polstelle x\_1 der Vielfachheit r\_1

\frac{a\_{11}}{x-x\_1}+\frac{a\_{12}}{(x-x\_1)^2}+...+ \frac{a\_{1r\_1}}{(x-x\_1)^{r\_1}},

und analog für alle weiteren Polstellen.

**<beispiel> Beispiel 3.** Man bestimme die komplexe Partialbruchzerlegung von

f(x)=\frac{x^2}{x^2-2x+1}. Zunächst führt man die Polynomdivision aus, da

\deg p = \deg q: Dies haben wir schon gemacht, es war

\frac{x^2}{x^2-2x+1} = 1 + \frac{2x-1}{x^2-2x+1} . Weil 1 doppelte Polstelle des Nenners ist, existieren Konstanten a,b, für die sich der Restterm schreiben lässt als

\frac{2x-1}{x^2-2x+1} = \frac{a}{(x-1)}+ \frac{b}{(x-1)^2}.

Entweder berechnet man a,b durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich, oder man bemerkt, dass wir eine solche Darstellung bereits durch das iterierte Horner-Verfahren erhalten hatten.

</beispiel>

**<beispiel> Beispiel 4.** Für f(x)=\frac{x^2+x+1}{(x-1)^3(x-2)} lautet der Partialbruchansatz

f(x) = \frac{a\_{11}}{(x-1)^1}+ \frac{a\_{12}}{(x-1)^2}+ \frac{a\_{13}}{(x-1)^3}

+ \frac{a\_{21}}{(x-2)^1}.

Multiplikation mit dem Nennerpolynom (x-1)^3(x-2) führt auf

x^2+x+1 = a\_{11}(x-1)^2(x-2)+ a\_{12}(x-1)(x-2)+ a\_{13}(x-2)+a\_{21}(x-1)^3.

Am schnellsten findet man nun die Koeffizienten a\_{ij}, indem man einfache Werte von x einsetzt (hier: x=0,1,2,3...) oder das Polynom auf der rechten Seite nach x-Potenzen sortiert und dann die Koeffizienten vergleicht (oder eine Kombination aus beidem). Ergebnis: a\_{11}=-7, a\_{12}= -6, a\_{13} = -3, a\_{21} = 7.

**<beispiel> Beispiel 5.** Die rationale Funktion f(x)= \frac{5x^2+2x+1}{x^3+x} hat die

Polstellen 0,i,-i, jede einfach. Ansatz und Ergebnis der

Partialbruchzerlegung lauten damit

\frac{5x^2+2x+1}{x^3+x} = \frac{a\_{11}}{x}+ \frac{a\_{21}}{x-i}+\frac{a\_{31}}{x+i} =

= ... = \frac{1}{x}+\frac{2-i}{x-i}+\frac{2+i}{x+i}.

</Seite 70><Seite 71>

Mitunter - insbesondere, falls die ursprüngliche rationale Funktion reelle Koeffizienten hat - will man das Auftreten komplexer Zahlen vermeiden, indem man die beiden letzten Terme zu einem Summand der Gestalt

\frac{2-i}{x-i}+\frac{2+i}{x+i} = \frac{ax+b}{x^2+1} = ... =\frac{4x+2}{x^2+1}

zusammenfasst. Dies ist die sogenannte reelle Partialbruchzerlegung.

</beispiel>

**<bemerkung> Bemerkung 1 (**reelle Partialbruchzerlegung)**.** Hat die rationale Funktion f(x)=\frac{p(x)}{q(x)} nur reelle Koeffizienten, so ist es manchmal erwünscht, vom Nenner q(x) nur die reellen Nullstellen zu betrachten. Sei etwa q der Gestalt q(x)=(ax^2+bx+c)\tilde{q}(x), wobei ax^2+bx+c keine reellen Nullstellen hat und in \tilde{q}(x) nicht mehr als Faktor vorkommt. Weil nach Voraussetzung a,b,c\in\R, sind die beiden Nullstellen dieses Polynoms zueinander komplex konjugiert, und man kann in der Partialbruchzerlegung die beiden Terme entsprechend zusammenfassen,

\frac{b\_1}{x-x\_0}+\frac{b\_2}{x-\overline{x}\_0}

= \frac{cx+d}{(x-x\_0)(x-\overline{x}\_0)}.

Man sieht leicht, wie der Ansatz der Partialbruchzerlegung dann zu verändern ist.

<abbildung> Cartoon ([www.CartoonStock.com](http://www.CartoonStock.com))

Eine Lehrerin zeigt mit dem Stock auf eine Wandtafel, an der steht:

Multiplication Table

2x2 = 4

2x3 = 6

2x4 = 8 …

Die Schüler gucken missmutig.

„No offense, but by the time w’re in the job market, won’t that stuff be obsolete?“

</abbildung>

## Aufgaben

**Aufgabe 5.1.** Sei \theta eine reelle Zahl im Intervall ]-\pi/2,\pi/2[. Wir betrachten die quadratische Gleichung in der Unbekannten z,

(\ast) \cos^2\thetaz^2-4\cos\thetaz+5-\cos^2\theta = 0 .

a) Man löse die Gleichung (\ast). Für welche Werte von \theta hat (\ast) eine

doppelte Nullstelle, und welchen Wert hat sie?

b) Seien Z und Z' die Punkte der komplexen Ebene, die den Lösungen z und z' von

(\ast) entsprechen. Man zeige, dass Z und Z' sich auf einer Hyperbel \mathcal{H}

bewegen, wenn \theta variiert.

(*Bemerkung: \mathcal{H} ist ein kalligraphisches H.)*

Man bestimme zudem Zentrum, Scheitelpunkte und Asymptoten dieser Hyperbel.

c) Man beschreibe die genaue Teilmenge von \mathcal{H}, die von Z und Z'

durchlaufen wird, wenn \theta in ]-\pi/2,\pi/2[ liegt.

**Aufgabe 5.2.** Man bestimme die Partialbruchzerlegung folgender rationaler Funktionen,

(1) f\_1(x) = \frac{6x^2-14x-2}{x^3+x^2-10x+8},

(2) f\_2(x) =\frac{36}{x^5 - 2x^4 - 2x^3+4x^2+x-2},

(3) f\_3(x) = \frac{4x^3 - 6 x^2 -2}{ x^4-2x^3-2x+4 }.

</Seite 71><Seite 72>

Seite 72 ist leer.

</Seite 72> <Seite 73>

# Anhang A: Besondere Schriften

In verschiedenen Gebieten der Mathematik werden neben den lateinischen Buchstaben noch weitere verwendet - die folgenden Tabellen sollen Ihnen den Zugang erleichtern.

## Deutsche Frakturschrift

Die folgende Tabelle stellt die handschriftliche Frakturschrift nach Sütterlin zusammen. *(Bemerkung: entfällt hier)* Es wird empfohlen, zu gegebener

Zeit die wichtigsten Sütterlin-Buchstaben (A, B, C, G, H, S...) zu lernen.

Eine Besonderheit der Frakturschrift ist, dass die im Buchsatz verwendeten Buchstaben stark von den Handgeschriebenen abweichen.

</Seite 73><Seite 74>

Im mathematischen Textsatz wird meist die Euler Fraktur (linke Tabelle, *entfällt hier*) von Hermann Zapf und Donald Knuth (dem Erfinder von \LaTeX) aus dem Jahre 1983 benutzt - sie ist für das ungeübte Auge leichter lesbar als die historischen Frakturarten. Rechts daneben (*entfällt hier*) zum Vergleich die gotische Frakturschrift aus dem yfonts-Package von \LaTeX.

*(Bemerkung: Der Befehl für die Euler Fraktur lautet* *\mathfrak{A}, \mathfrak{a}, …,*

*der Befehl für die gotische Frakturschrift goth{A}, goth{a}, ….)*

In der linearen Algebra waren Frakturbuchstaben früher weit verbreitet, um Vektoren (Kleinbuchstaben) und Vektorräume (Großbuchstaben) zu bezeichnen. In der Algebra und der Theorie der Lie-Algebren werden sie heute noch viel verwendet. Zum Beispiel wird die symmetrische Gruppe auf n Elementen (d.h. die Gruppe aller Permutationen) oft mit \mathfrak{S}\_n bezeichnet, was handschriftlich oft mit \gamma\_n verwechselt wird (und dann keinen Sinn ergibt). Die Menge aller Endomorphismen eines Vektorraums V schreibt man \mathfrak{gl}(V), die Menge der schiefsymmetrischen Endomorphismen \mathfrak{o}(V) usw. Zur Erklärung dieser

Bezeichnungen besuche man eine Vorlesung über Lie-Gruppen und Lie-Algebren... Da die Fraktur wie Sonderzeichen und nicht für Fließtext gebraucht wird, entfallen typographische Feinheiten wie die korrekte Verwendung des S oder Ligaturen meistens.

## Griechisches Alphabet

Das gesamte griechische Alphabet wird in allen Gebieten der Mathematik (und der theoretischen Physik) viel verwendet, man sollte es deswegen so schnell wie möglich gut beherrschen. Sie laufen sonst Gefahr, in der Vorlesung schon am Entziffern des Tafelanschriebs zu scheitern! In der ersten Klasse würde man nun eine gewisse Zeit mit dem Üben der Buchstaben verbringen und Seiten mit A's, b's usw. füllen. Im ersten Semester entfällt die Aufsicht während dieser Übungen, doch das Lernziel ist das gleiche: Bitte üben Sie diese Buchstaben so lange, bis Sie sie können (lesen und schreiben).

\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \lambda, \my, \ny, \xi,

\omikron, \pi, \rho, \sigma, \tau, \ypsilon, \phi, \chi, \psi, \omega.

Für die entsprechenden Großbuchstaben wird jeweils der erste Buchstabe groß geschrieben: z.B. \Alpha.

</Seite 74><Seite 75>

## Hebräische Buchstaben

In manchen Gebieten der Logik und der Mengenlehre werden die ersten vier

Buchstaben des hebräischen Alphabets verwendet. Ehrlicherweise muss

man sagen, dass auch die meisten Mathematiker sie nicht wirklich gut schreiben können...

\aleph, \beth, \gimel, \daleth.

</Seite 75> <Seite 76>

Seite 76 ist leer.

</Seite 76> <Seite 77>

# Anhang B: Beweise in der Mathematik

## Allgemeine Bemerkungen

Die Mathematik formuliert ihre Ergebnisse nicht wie andere Naturwissenschaften als experimentelle Befunde, sondern als Implikationen (oder Äquivalenzen).

Jedes mathematische Ergebnis wird nach einem immer gleichen Schema formuliert: Als Satz, Lemma, Proposition oder Korollar (zur Unterscheidung dieser Begriffe gleich mehr). Nach dem Satz kommt der Beweis und, hoffentlich, ein paar erläuternde Beispiele. Vor dem Satz schaden ein paar einführende Worte nicht (worum geht es, wie situiert sich das Ergebnis im Gesamtkontext, warum ist es nötig/interessant, sich damit zu befassen). Jeder Satz (Lemma usw.) hat

(1) Voraussetzungen – für welche Objekte und unter welchen Bedingungen soll die

Aussage richtig sein,

(2) eine Aussage – welche Eigenschaft gilt, wenn die Voraussetzungen erfüllt sind.

Beispiele für Aussagen haben wir im ersten Kapitel kennen gelernt.

Ein Satz ohne Beweis ist nur eine Vermutung – also kein Satz und meistens wertlos. Der Beweis erklärt, wie man aus den Voraussetzungen zu der formulierten Aussage kommt. Dabei ist besonders herauszuarbeiten, an welcher Stelle welche Voraussetzungen verwendet werden oder ältere, bereits bekannte Ergebnisse eingehen, und wie die Aussagen logisch miteinander verknüpft sind (ist es eine Folgerung, eine äquivalente Umformung, ein Spezialfall eines anderen

Ergebnisses. . . ). Anfang und Ende eines Beweises sollten als solche kenntlich gemacht werden, dies erleichtert das Lesen ungemein. Am Anfang passiert dies gewöhnlich mit dem Wort Beweis, am Ende mit einem vereinbarten Symbol (meist ein kleines Quadrat) oder den Buchstaben q. e. d. (Abkürzung von ”quod erat demonstrandum“, lateinisch für ”was zu beweisen war“). Grundsätzlich gilt: Ein Beweis muss so aufgeschrieben sein, dass der Leser nach dem Lesen den Satz, der bewiesen wurde, sauber formulieren kann. Angewandt auf Hausaufgaben bedeutet

dies: Es ist unnötig, die Aufgabe nochmal abzuschreiben, aber es ist notwendig, die Lösung so aufzuschreiben, dass ein Leser, der mit der Aufgabe nicht vertraut war, sie hinterher formulieren könnte.

Ein echter mathematischer Text ist nicht nur eine Anordnung von Sätzen und Beweisen, er muss eine Gliederung haben, auch wenn diese nicht immer sichtbar gemacht wird. Achten Sie auf eine logische und angenehme Anordnung, betonen Sie Besonderheiten, wo Betonungen nötig sind, weisen Sie auf Zwischenbeziehungen hin, beschreiben Sie Beispiele und Gegenbeispiele. Achten Sie beim Schreiben auf

guten Stil. Ein mathematischer Text sollte klar und unaufdringlich sein, er ist nicht der Ort, um sich in seitenlangen verschachelten Sätzen literarisch auszutoben (vermeiden Sie aber auch zu trockene Prosa im Stile einer technischen Betriebsanleitung). Guter Stil schließt korrekte Grammatik, korrekte Wortwahl, korrekte Interpunktion und vor allem gesunden Menschenverstand ein.

Gebrauchen Sie Wörter und Symbole korrekt. Der Satz ”Eine komplexe Zahl hat einen Betrag ≥ 0“ ist ungeschickt, weil der unbestimmte Artikel ”ein“ mehrdeutig ist: Gibt es eine komplexe Zahl mit dieser Eigenschaft oder hat jede komplexe Zahl diese Eigenschaft? In diesem Fall wäre ”Jede komplexe Zahl hat einen Betrag ≥ 0“ besser. Vermeiden Sie Nebensätze mit ”wobei“ – sie sind meist ein Hinweis, dass etwas vergessen wurde, was besser vorher gesagt worden wäre.

</Seite 77><Seite 78>

Also: statt “Wenn n genügend groß ist, dann gilt |a\_n| < \epsilon, wobei \epsilon eine vorher bestimmte positive Zahl ist“ ist es besser zu sagen: ”Ist \epsilon eine beliebige positive Zahl, dann gilt |a\_n| < \epsilon für hinreichend großes n“.

Ein typischer Fehler ist die Vermengung oder Auslassung von Gleichheits- und Implikationszeichen, dabei haben sie einen ganz anderen logischen Stellenwert. Wo auch immer ein Gleichheitszeichen steht, links und rechts davon sollten Größen gleicher Art (Zahlen, Mengen, Räume, Abbildungen. . . ) stehen. Eine Implikation ist dagegen eine logische Verknüpfung von Aussagen. Im laufenden Text sollte man das Zeichen \Ra sparsam verwenden, da es dem Leser nicht verrät, wieso die Implikation richtig ist. Es ist fast immer informativer, ein paar Worte zu sagen: ”Aus

Satz X folgt dann . . .“, ”Umstellen der Gleichung ergibt“, ”Leitet man diese Identität ab, so erhält man. . .“.

Vermeiden Sie irrelevante Informationen – etwa Voraussetzungen in einem Satz, die im Verlauf des Beweises gar nicht benötigt werden. Ebenso sollte man Objekten nur einen Namen, Gleichungen nur eine Nummer geben, wenn diese später mindestens einmal gebraucht werden.

Cartoon

*Eine Studentin steht vor einer Tafel mit Formeln, ein Professor neben ihr.*

„It’s an excellent proof, but it lacks warmth and feeling.“

## Satz, Lemma, Proposition und Korollar

Es mag überraschen, aber die Unterschiede zwischen diesen verschiedenen Bezeichnungen sind nicht klar festgelegt und die konkrete Auswahl ist jedem

Mathematiker selbst überlassen – entsprechend groß sind die Unterschiede im Gebrauch. Im Normalfall heißt eine mathematische Behauptung Satz. Besonders wichtigen Sätzen wird der ”Ehrentitel“ Hauptsatz zuerkannt, weswegen ein paar zentrale Ergebnisse der klassischen Mathematik die Bezeichnung Hauptsatz im

Namen tragen, etwa der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. In neueren mathematischen Schriften gilt es aber eher als unschicklich, ein eigenes Ergebnis als Hauptsatz zu kennzeichnen (dies sollte wohl eher die Nachwelt entscheiden).

Handelt es sich um eine leichtere Behauptung (aber was ist schon ”leicht“?) oder eine Vorbereitung für ein zentrales Ergebnis, dann ist es üblich, diese ein Lemma zu nennen. Propositionen sind im deutschen Sprachgebrauch eher selten, sie sind gewöhnlich irgendwo zwischen Satz und Lemma anzusiedeln. Letztlich ist die Wahl zwischen Satz, Lemma und Proposition die Möglichkeit, eine persönliche Gewichtung der Ergebnisse vorzunehmen. Sie sollte also mit Bedacht erfolgen, hat aber keine zentralen Auswirkungen auf den mathematischen Inhalt.

</Seite 78><Seite 79>

Die Bezeichnung Korollar signalisiert, dass das entsprechende Ergebnis eine Folgerung aus einem anderen Ergebnis ist, die so wichtig ist, dass man sie getrennt formuliert (dabei muss die Folgerung keineswegs offensichtlich sein, sie benötigt wie jede mathematische Behauptung einen Beweis). Die Bezeichnung als Korollar gibt dem Leser eine klare Hilfestellung, da sie die Querbeziehungen zwischen Einzelergebnissen sichtbar macht. Deswegen sind hier die Freiheiten deutlich eingeschränkter, und noch mehr Vorsicht beim Umgang mit diesem Begriff ist nötig:

Denn einerseits hängt alles mit allem irgendwie zusammen, aber durch eine inflationäre Verwendung verliert der Begriff des Korollars seine ordnende Funktion. Andererseits macht es auch keinen Sinn, das Nachdenken über die Konsequenzen aus den erzielten Ergebnissen einfach dem Leser zu überlassen.

Einen völlig anderen Stellenwert haben in der Mathematik die Axiome oder Postulate. Ein Axiom ist eine Annahme, die nicht bewiesen werden kann und deswegen postuliert wird (oder auch nicht). In dieser Vorlesung wurde das Auswahlaxiom besprochen, das im Rahmen der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre unbeweisbar ist. Man kann also Mathematik mit oder ohne Auswahlaxiom betreiben, und kein Weg ist richtiger oder falscher als der andere. Es gibt aber eine Reihe von Resultaten, die man ohne Auswahlaxiom eben nicht beweisen kann.

Ein weiteres berühmtes, weil historisch bedeutsames Beispiel ist das Parallelenaxiom. Es besagt, dass zu einer gegebenen Gerade und einem Punkt außerhalb dieser Geraden genau eine Gerade durch diesen Punkt existiert, die zur Ausgangsgeraden parallel ist. Bei einem axiomatischen Aufbau der euklidischen Geometrie ist dies mit Abstand das komplizierteste Axiom. Dies wurde schon im

Altertum als ”Makel“ in der Theorie des Euklid empfunden: Immer wieder gab es Versuche, es aus den anderen Axiomen herzuleiten und damit zu zeigen, dass es für

die Definition der euklidischen Geometrie entbehrlich ist. Historisch ist diese Aufgabe als das Parallelenproblem bekannt. Sie blieb über 2000 Jahre lang ungelöst. Wie beim Auswahlaxiom gibt es auch für das Parallelenaxiom mehrere äquivalente Formulierungen, so etwa, dass die Winkelsumme im Dreieck gleich π ist.

Carl Friedrich Gauß erkannte als erster, dass das Parallelenproblem grundsätzlich unlösbar ist; er veröffentlichte seine Erkenntnisse aber nicht. Dies tat Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski, indem er 1826 eine neuartige Geometrie vorstellte, in der alle übrigen Axiome der euklidischen Geometrie gelten, das Parallelenaxiom jedoch nicht. Sie wird als lobatschewskische Geometrie oder hyperbolische Geometrie bezeichnet. Janos Bolyai gelangte unabhängig davon fast gleichzeitig

zu ähnlichen Resultaten.

Im Rahmen der modernen Differentialgeometrie löst sich das Problem weitgehend in Luft auf, weil Geraden durch kürzeste Verbindungsstrecken ersetzt werden (sogenannte Geodäten – auf der Sphäre sind das zum Beispiel die Großkreise) und Parallelität in einem allgemeineren Sinne verstanden wird. Auf der Sphäre und anderen Flächen ergeben sich dann auf ganz natürliche Weise geometrische Situationen, wo mehrere Parallelen durch einen Punkt gehen, Parallelen sich schneiden können, die Winkelsumme im Dreieck vom Dreieck abhängt usw.

## Beweismethoden

Im Verlauf der Vorlesung wurden einige Beweismethoden bereits vorgestellt, deswegen begnügen wir uns hier mit einer kurzen zusammenfassenden Darstellung.

Grundsätzlich kann man einen Beweis direkt oder indirekt führen. Beim direkten Beweis wird durch logische Schlussfolgerungen direkt aus den Voraussetzungen auf die gewünschte Aussage geschlossen. Der indirekte Beweis ist dagegen ein Widerspruchsbeweis, der aus der Negation der zu beweisenden Aussage auf die Negation von mindestens einer Voraussetzung schließt. Er beruht auf dem Kontrapositionslemma und wurde deswegen auf S. 9 bereits besprochen. Einer

der beliebtesten Widerspruchsbeweise ist die Irrationalität von \sqrt{2}, \sqrt{3} usw. Dies wurde in Kapitel 3, S. 46 vorgemacht.

</Seite 79><Seite 80>

Weiterhin unterscheidet man zwischen konstruktiven und nicht konstruktiven Beweismethoden. Eine wesentliche Stärke der Mathematik ist es, dass sie oft Aussagen über die Existenz eines Objektes macht, ohne dieses genau (etwa durch eine Formel) beschreiben zu können. Zum Beispiel ist es wertvoll, für bijektive Abbildungen von der Existenz einer Umkehrfunktion zu wissen, aber natürlich ist diese Aussage viel zu allgemein, um durch eine Formel die Umkehrfunktion explizit benennen zu können. Beweise, die auf das Auswahlaxiom nicht verzichten können, sind grundsätzlich nicht konstruktiv, da es nicht möglich ist, die Auswahlfunktion explizit zu konstruieren. In den Anwendungen stößt man mit den nicht konstruktiven Beweismethoden oft irgendwann an eine mathematische Grenze, weil für eine genauere Untersuchung eine konkrete Beschreibung des Objektes nötig wäre. Umgekehrt kann es manchmal instruktiv und nützlich sein, zu der theoretisch exakten, aber nicht konstruierbaren Lösung noch eine genäherte Lösung zu bestimmen, etwa mit den Methoden der Numerik oder Optimierung, mit einer Skizze usw. Manchmal findet man im Lauf der Zeit aber auch einen konstruktiven Beweis, der dann i.A. als Fortschritt empfunden wird.

Es gibt ein paar Standardmethoden zum Beweisen gewisser Typen von Aussagen. Eine solche Methode ist der Induktionsbeweis, siehe Abschnitt 2.2.

Eine andere Methode sind Klassifikationsbeweise. Will man eine Aussage beweisen über eine Klasse von Objekten, die allesamt in Gestalt einer (vielleicht recht langen) Liste bekannt sind, so ist es möglich, dies durch Abarbeiten aller möglichen Fälle zu tun. Zum Beispiel kennt man alle reellen endlichdimensionalen assoziativen Divisionsalgebren, dies sind genau \R, \C und \H (die Hamilton’schen Quaternionen). Einen Satz über reelle endlichdimensionale assoziative Divisionsalgebren kann man also immer so beweisen, dass man ihn separat für \R, \C und \H beweist. Ein solcher Beweis ist oft unelegant und schwerfällig, aber es gilt wie bei Induktionsbeweisen,

dass ein uneleganter Beweis allemal besser als gar keiner ist. Für manche Ergebnisse der Mathematik werden oft Jahre oder gar Jahrzehnte benötigt, um zu einem klassifikationsfreien Beweis zu kommen.

*(Fußnote 1*: Beispiel: 1926 veröffentlichten ´Elie Cartan und Jan Schouten einen richtigen Satz der Differentialgeometrie mit falschem Beweis, 1972 publizierte Joe Wolf einen richtigen, aber 40 Seiten langen Beweis, der auf einer Klassifikation beruhte, 2009 fanden dann Thomas Friedrich und ich einen 8 Seiten kurzen klassifikationsfreien Beweis – nachzulesen in Diff. Geom. Appl. 28 (2010), 480-487.

*Ende der Fußnote 1)*

Es gibt noch einige weitere Beweismethoden, sie beruhen aber oft auf allgemeinen

Sätzen und haben nicht den gleichen Stellenwert wie die hier genannten Verfahren. Jedes Teilgebiet der Mathematik hat im Lauf der Jahre seine eigenen typischen Beweisstrategien entwickelt, diese lernt man automatisch in den entsprechenden Vorlesungen kennen. Letztlich gehört es zu den ”soft skills“ eines Mathematikers, ein Gefühl dafür zu entwickeln, welche Beweisstrategie in welcher Situation angemessen sein könnte.

</Seite 80><Seite 81>

# Anhang C: Wie bearbeite ich ein Übungsblatt?

von Prof. Manfred Lehn, Mainz

Original: <http://www.mathematik.uni-mainz.de/Members/lehn>

Übungsaufgaben spielen in der Mathematik eine zentrale Rolle. Mathematik fängt

überhaupt erst da an, wo man Probleme löst. Dazu muss man das Problem analysieren und damit spielen, um es schließlich mit Phantasie und Sinn für Eleganz und Symmetrie zu lösen. Übungsaufgaben sind der natürliche Weg, diese Fähigkeiten zu erwerben.

Betrachten Sie jede Übungsaufgabe als ein intellektuelles Abenteuer. Je schwieriger die Aufgabe, desto größer das Abenteuer. Man lernt Mathematik nicht aus Büchern oder Vorlesungen, sondern nur durch Selbermachen. Genau dazu geben Ihnen die Übungen zu den Vorlesungen, die Sie besuchen, Gelegenheit. Eine einzige selbständig gelöste Übungsaufgabe ersetzt zehn nachvollzogene Beispiele in einem Lehrbuch! Es gibt keinen anderen Weg, Mathematik zu lernen. Lösen Sie also Übungsaufgaben.

Eignen Sie sich diesen Blickwinkel auf die Übungsaufgaben an. Es geht nicht darum, dass Sie sich auf die Abschlußklausur vorbereiten. Die Abschlussklausur soll umgekehrt prüfen, ob Sie gelernt haben, Probleme zu lösen.

Unter den Übungsaufgaben werden sicherlich auch einige sein, in denen der in der Vorlesung behandelte Stoff oder besprochene Verfahren eingeübt werden. Hüten Sie sich davor, nur diese zu bearbeiten. Solche Aufgaben dienen nur zum Aufwärmen. Der eigentliche Lerneffekt entsteht erst dann, wenn Sie Ihren Verstand über das schon Bekannte ein wenig hinausstrecken. Das ist wie im Sport. Übungsaufgaben sind also insbesondere etwas völlig anderes als Schulhausaufgaben. Abschreiben ist zwecklos.

## Bearbeitungszeitraum oder Bearbeitungszeitpunkt?

In der Regel vergeht zwischen Ausgabe- und Abgabetermin eines Übungsblatts eine Woche. Das bedeutet, Sie haben eine Woche Zeit zum Nachdenken und Grübeln, Schmirgeln und Feilen. Diese Zeit müssen Sie vom ersten Augenblick nutzen. Wenn etwa montags der Ausgabe- und Abgabetermin ist und Sie am Samstag zum ersten Mal einen Blick auf das Blatt werfen, so haben Sie fünf volle Arbeitstage verschenkt.

Nur wenige Aufgaben sind so angelegt, dass sie einfach abgearbeitet werden können. Manche Aufgaben wird man mechanisch lösen können, etwa solche, die ein

bestimmtes Rechenverfahren einüben sollen. Doch die meisten Aufgaben erwarten, dass Sie über die Lösung nachdenken. Sie können nicht erwarten, dass Sie den richtigen Einfall haben, sobald Sie gerade einmal fünf Minuten oder auch zehn Minuten aufs Blatt gestarrt haben. Viele Ideen müssen im Unterbewusstsein gären und reifen, bevor sie als Lösung ans Licht kommen. Sie müssen auch in sonst

verschenkten Minuten unter der Dusche oder in der Straßenbahn oder beim Anstehen beim Bäcker über die Aufgaben nachdenken, oder zumindest Ihrem Unterbewußtsein die Möglichkeit dazu geben.

[Ich musste mir Fragen gefallen lassen, ob ich den letzten Satz wörtlich meine. Nun: Ja und Nein. Natürlich kann und wird jeder neben der Mathematik noch andere private oder Studieninteressen haben. Aber man kann Mathematik auch nicht nebenbei betreiben. Die Mathematik

</Seite 81><Seite 82>

ist eine sehr eifersüchtige Göttin. Das ist in jedem Falle eine persönliche Entscheidung. Aber es ist sicher eine falsche Strategie zu sagen: ich löse Übungsaufgaben nur dienstags von 16 bis 18 Uhr.]

Das geht aber nur, wenn Sie die Aufgaben kennen. Das bedeutet: Beginnen Sie mit dem Nachdenken über die Aufgaben in dem Augenblick oder in jedem Falle an dem Tag, an dem Sie das Aufgabenblatt erhalten haben. Ersetzen Sie also den Zeitpunkt der Bearbeitung durch einen Zeitraum, und zwar den maximal möglichen. Schöpfen Sie diesen Zeitraum voll aus: auch und gerade wenn Sie etwa schon eine Lösung haben, kann es lohnen, darüber nachzudenken, ob man diese Lösung vereinfachen oder eleganter machen kann, oder ob es noch eine ganz andere Lösung gibt.

Es klingt banal zu bemerken, dass man nur Aufgaben lösen kann, die man kennt. Sie können nur dann im Stehen oder Liegen über eine Lösung nachdenken, wenn Sie die Aufgabe formulieren können, ohne aufs Blatt zu schauen. Wohlgemerkt, Sie sollen die Aufgaben nicht auswendig lernen, sondern verstehen. Dazu müssen Sie über die Aufgabe bei der ersten Lektüre mindestens solange nachdenken, dass Sie die Aufgabenstellung in eigenen Worten wiederholen können, d. h. Sie müssen die Aufgabe jederzeit einem Kommilitonen erklären können. Formulieren Sie also die Aufgabenstellung in eigenen Worten ohne Rückgriff auf das Aufgabenblatt.

Versuchen Sie immer, alle Aufgaben zu bearbeiten und nicht nur die, die Ihnen leicht fallen oder die zufällig am Anfang stehen. Der Lerneffekt ist um so größer, je schwieriger die Aufgabe ist und je länger Sie zur Lösung gebraucht haben. Ein großer Teil des Reizes des Mathematikstudiums liegt in den Erfolgserlebnissen gelöster Aufgaben.

## Analyse der Aufgabenstellung

Es ist klar, dass wir uns als Erstes aller in der Aufgabenstellung verwendeten Begriffe versichern müssen. Wiederholen Sie also gegebenenfalls die Definitionen aller vorkommenden Begriffe. Sie müssen in jedem Falle sicherstellen, dass Sie mit diesen Begriffen nicht nur verschwommene Vorstellungen verbinden, sondern präzise Definitionen. Andererseits sind Begriffsdefinitionen allein häufig noch hohl. Die Bedeutung eines Begriffs wird erst durch die Menge aller Sätze gegeben,

die über diesen Begriff gemacht werden. Rufen Sie sich also die wesentlichen Eigenschaften der Begriffe in Erinnerung und in welcher Beziehung sie zueinander stehen.

Die nächste Frage könnte sein: In welchen Sätzen kommen die Begriffe aus der Übungsaufgabe vor? Ist die Übungsaufgabe zum Beispiel ein einfacher Spezialfall eines schon bewiesenen Satzes aus der Vorlesung? Oder verallgemeinert die Übungsaufgabe einen Satz aus der Vorlesung?

Wenn in der Aufgabe ein allgemeiner Sachverhalt behauptet wird, machen Sie sich an einfachen Beispielen (=Spezialfällen) klar, dass die Behauptung wirklich richtig ist, oder auch nur, was denn eigentlich die Behauptung konkret sagt. Wenn man genügend viele Beispiele oder besser: die richtigen Beispiele kennt, so erkennt man häufig auch, warum die Behauptung richtig ist, d. h. findet einen Beweis dafür.

Versuchen Sie, die Aufgabenstellung zu verbildlichen. Reelle Funktionen kann man zeichnen. Wenn nach geometrischen Konfigurationen gefragt ist, malt man sich diese erst einmal auf. Auch in rein mengentheoretischen Konstruktionen sind schematische Bilder nützlich.

Überlegen Sie, welche Beweismethoden in der Vorlesung im Zusammenhang mit den Begriffen aus der Aufgabe vorkamen. Kann man diese Methoden für die Aufgabe verwenden? Selten wird man von Ihnen erwarten, dass Sie einen genialischen neuen Einfall haben. Trauen Sie Ihrer Intuition. Fallen Ihnen Situationen ein, an die Sie durch die Aufgabe erinnert werden?

Ein anderer möglicher Trick ist, die zu beweisende Behauptung anzuzweifeln. Um sie zu widerlegen, würde es genügen, ein Gegenbeispiel zu konstruieren. Wenn sich eine Behauptung gegen den Beweis sträubt, versuchen Sie also ein Gegenbeispiel zu erfinden. Wir wissen natürlich, dass das nicht geht (es sei denn, die Aufgabenstellung ist falsch). Aber entscheidend ist die Frage,

</Seite 82><Seite 83>

warum es nicht geht. Wenn Sie also mit Raffinesse Ihr Gegenbeispiel aufbauen, aber immer wieder von den Tatsachen eingeholt werden, wird vielleicht allmählich eine Struktur deutlich, die zu einem Beweis führt. Das ist sozusagen der dialektische Zugang. Versuchen Sie, auf vielen verschiedenen Wegen an die Lösung heranzukommen.

## Reden Sie über die Aufgaben!

Grundsätzlich gilt: Man soll möglichst viel über Mathematik reden. Reden hilft, die eigenen Gedanken zu ordnen. Sie können mit Ihren Kommilitonen oder Ihrem Übungsgruppenleiter über die Aufgabenstellung, Lösungsansätze und die Lösung reden.

In jedem Falle gilt, dass Sie vorher nachgedacht haben müssen, wenn das Gespräch nutzen soll: Sie können über die Aufgabenstellung, also Druckfehler, mathematische Fehler, Absicht der Aufgabe, Präzisierung der Aufgabe usw. nur dann reden, wenn Sie genau genug gelesen haben, um zu erkennen, ob die Aufgabe sinnvoll formuliert ist.

Ebenso ist es nur dann sinnvoll, über Lösungsansätze zu reden, wenn Sie schon Lösungsansätze durchdacht haben, aber vielleicht in einer Sackgasse gelandet sind. Dann können Sie solche Ansätze oder halbfertige Lösungen mit Kommilitonen austauschen und diskutieren. Andernfalls geht Ihnen das Aha-Erlebnis und damit der Zweck der Aufgabe verloren.

Gruppenarbeit kann bei der Bearbeitung der Aufgaben sinnvoll sein, wenn das Kräfteverhältnis ausgewogen und das Geben und Nehmen wechselseitig ist. Letztlich werden Sie an Ihren eigenen Fähigkeiten gemessen. Insbesonder heißt das nicht, dass Sie sich Lösungen erklären lassen sollen. Das können Sie natürlich tun, wenn Sie sich darüber im Klaren sind, dass mindestens die Hälfte des Übungseffektes dabei verloren geht. Wenn Sie schon eine Lösung haben, kann es sehr lehrreich sein, die eigene Lösung der Kritik anderer auszusetzen oder zu sehen, wie andere

dasselbe Problem angehen.

Aber: Bei allem Reden darf nie das konzentrierte Nachdenken allein zu kurz kommen. Wenn Sie eine Lösung gefunden zu haben glauben, sollten Sie auch in der Lage sein, diese Lösung einem anderen zu erklären. Wenn Ihnen dabei die Worte fehlen oder wenn Sie dabei in ein ”Na ja, irgendwie so. . .“ abrutschen, dann ist das ein Hinweis darauf, dass in Ihrem Verständnis noch eine kleine Lücke ist.

Cartoon ([www.CartoonStock.com](http://www.CartoonStock.com))

*Vater und Sohn sitzen am Schreibtisch. Der Vater schaut etwas ratlos in ein Methmatikbuch.* Don’t be embarrassed to ask for help dad.

## Der Moment des Aufschreibens

Der Augenblick der schriftlichen Fixierung ist ein kritischer Moment. Jetzt stellt sich heraus, ob die im Geiste gefundene oder geahnte Lösung sich wirklich hinschreiben lässt. Jede richtige Lösung lässt sich auch in angemessener Weise niederschreiben.Wenn Sie Schwierigkeiten haben, Ihre Gedanken geordnet aufs Papier zu bringen, dann liegt das daran, dass Ihre Gedanken noch nicht genügend geordnet sind. Legen Sie die Feder wieder hin und denken Sie noch ein

</Seite 83><Seite 84>

wenig nach. Überlassen Sie es auf keinen Fall dem Korrektor oder Übungsgruppenleiter, Ihre hingeworfenen Gedankenfetzen zu ordnen.

Es gibt bei schriftlichen Lösungen zwei Extreme, die beide wenig zufriedenstellend sind. Das eine Extrem ist eine reine Rechnung ohne argumentierenden oder kommentierenden Text. Das andere Extrem ist der Roman, der um das Problem herumredet. Die Wahrheit liegt irgendwo dazwischen.

Der eigentliche Gegenstand der Argumentation werden gewisse definierte Objekte sein, logische oder mathematische Beziehungen zwischen diesen oder Rechnungen. Der Text hat die Aufgabe, den logischen Stellenwert dieser mathematischen Bausteine zu klären. Ein und dieselbe mathematische Phrase, etwa ”x < n“, hat ganz verschiedene Bedeutungen je nachdem, ob im Text vorher steht: ”Wir können also ohne Einschränkung annehmen, dass. . .“ oder ”Hieraus schließen wir, dass. . .“ oder

”angenommen, es gilt. . .“ . Die Aufgabe des umgangssprachlichen Textes ist es, die Bedeutung der Formelfragmente im Gesamtzusammenhang festzulegen.

Eine Lösung zu einer Aufgabe besteht aus einem umgangssprachlichen schriftlichen Text in deutscher Sprache. Deutsch steht hier nicht im Gegensatz zu Englisch oder Russisch, sondern im Gegensatz zu Mathsprech oder irgendeiner anderen korrumpierten Kommunikationsform. Ihre Argumentation soll formaler Strenge genügen, nicht die Sprache. Schreiben Sie gute Prosa.

Ihr Text soll also aus ganzen Sätzen bestehen. Jeder Satz enthält ein Subjekt und ein Prädikat. Vermeiden Sie Ketten von logischen Symbolen. Vermeiden Sie aber auch umständliche verbale Umschreibungen, wenn es dafür eine konzise Symbolik gibt. Hier ist die Vorlesung nicht immer Vorbild! Aber die Vorlesung ist eine im wesentlichen mündliche Veranstaltung. Textgestaltung an der Tafel hat andere Aufgaben als Textgestaltung auf dem Papier.

Jede richtige Lösung lässt sich auch richtig ausdrücken.

Mit der Zeit werden Sie Ihren eigenen Stil entwickeln. Das gelingt nur, wenn Sie sich mit den Aufgaben Mühe geben und Ihre Lösungen wirklich als Texte auffassen, auch wenn diese natürlich immer wieder durch Rechnungen unterbrochen sein werden. Ihre Lösung muss auch einem Leser verständlich sein, der nur die Aufgabenstellung, aber nicht selbst die Lösung kennt. Noch einmal: Sie sollen nicht einen wissenden Leser durch obskure Hinweise davon überzeugen, dass Sie selbst auch die Lösung verstanden haben, sondern Sie sollen so schreiben, dass ein unwissender Leser die Lösung versteht.

Ihre Aufgaben müssen in einer lesbaren Handschrift geschrieben sein, Formeln und Symbole sollten sorgfältig und sauber ausgeführt sein. Wenn Sie es noch nicht können, lernen Sie die griechische Schrift und die deutsche Frakturschrift nach Sütterlin. Auch in Formeln gibt es große und kleine Buchstaben. Symbole, die als Indizes oder Exponenten auftauchen, müssen auch wirklich sichtbar unter oder über der Hauptlinie stehen; in der Regel sind sie etwas kleiner. Klammern Sie so, dass man auf Anhieb sieht, welche Klammerpaare zusammengehören.

Wenn Sie einen guten Übungsgruppenleiter haben, wird er auch bei richtigem Ergebnis nicht einfach einen Haken plazieren, sondern rigoros Ihren Stil korrigieren. Das erste Studienjahr hat unter anderem die Aufgabe, Ihnen Lesen und Schreiben beizubringen.

Geben Sie niemals die erste Version Ihrer Niederschrift ab. Fertigen Sie in jedem Falle mindestens eine saubere Abschrift Ihrer Lösungen an! Einen Text, in dem mehrfach Korrekturen angebracht sind, in dem ganze Passagen durchgestrichen und neu gesetzt sind, bei dem der Leser aufgefordert wird, Ergänzungen von der letzten Seite einzuschieben, sollte man niemandem vorlegen. Lesen Sie Ihren Text auch unter dem folgenden Gesichtspunkt noch einmal durch: Überzeugt die Argumentation des Textes Sie eigentlich selbst? Mal ganz ehrlich? Wenn nicht,

fangen Sie von vorn an. Das ganze ist ein harter, manchmal mühseliger Vorgang. Aber der Stolz auf eine gleichermaßen richtige wie schöne Lösung wird Sie entschädigen.

</Seite 84><Seite 85>

<abbildung>

Cartoon

*Zwei Mathematiker stehen vor einer Tafel, an der außer verschiedenen Formeln steht:* Then a miracle occurs…

*Kommentar des einen Mathematikers:* I think you should be more explicit here in step two.

</abbildung>

## Vorrechnen an der Tafel

Kommunikation von Ergebnissen ist ein wichtiger Bestandteil von mathematischem Arbeiten. Das gilt in gleicher Weise für Mathematiker, die an den Universitäten und Schulen in Lehre und Forschung tätig sind, wie für die, die in der Industrie, in Versicherungen, bei Banken oder Beratungsunternehmen in vielschichtig zusammengesetzten Arbeitsgruppen wirken. Einen klaren, verständlichen Vortrag halten zu können, ist also Ausbildungsziel.

Sie haben in den Übungsgruppen und später in Seminaren Gelegenheit, den freien Vortrag zu üben. In den Übungsgruppen fangen wir klein an. Also keine Bange. Wir erwarten aber, dass jeder Student im Laufe eines Semesters wenigstens zweimal vorgerechnet hat. In dem Text ”Wie halte ich einen Seminarvortrag?“ habe ich einige Tips und Hinweise zusammengestellt, wie man einen Seminarvortrag vorbereitet und an der Tafel hält. Insbesondere der letzte Teil dieses Textes gilt entsprechend auch für Übungsgruppen. Ich erlaube mir deshalb hier die Faulheit, einfach auf diesen Text zu verweisen. Scheuen Sie sich nicht, an die Tafel zu gehen. Es wird Sie

niemand fressen.

</Seite 85><Seite 86>

Seite 86 ist leer.

</Seite 86><Seite 87>

# Anhang D: Wie halte ich einen Seminarvortrag?

von Prof. Manfred Lehn, Mainz

Original: <http://www.mathematik.uni-mainz.de/Members/lehn>

Ein Seminarvortrag hat zwei Aufgaben. Zum einen soll der Vortragende etwas lernen, genauer: sich ein bestimmtes, mehr oder minder fest umrissenes mathematisches Thema aneignen und bearbeiten. Zum anderen sollen die anderen Seminarteilnehmer etwas lernen, indem der Vortragende sein erworbenes Wissen in sozusagen vorgekauter Form weitergibt. Den Dozenten davon zu überzeugen, dass man einen Schein verdient hat, gehört dagegen nicht zu den Zielen eines Vortrages. Der Schein ist allenfalls ein Nebeneffekt. Nehmen Sie sich das bitte zu Herzen,

besonders dann, wenn der Scheinerwerb tatsächlich Ihre wesentliche Motivation, überhaupt am Seminar teilzunehmen, sein sollte.

Ein mündlicher Vortrag hat Ausdrucksmittel, die allen schriftlichen Quellen abgehen. Ein guter Seminarvortrag, wie auch eine gute Vorlesung, ist sich dieser Möglichkeiten bewusst und setzt sie ein. Ein schlechter Vortrag ist organisierte Zeitvernichtung und grob unhöflich gegen die Hörer.

Im folgenden habe ich einige Dinge aufgeschrieben, die Ihnen bei der Vorbereitung und der Durchführung eines Seminarvortrages helfen sollen. Nicht alles, was ich hier zusammengetragen habe, wird ungeteilte Zustimmung finden. Andere werden andere Schwerpunkte setzen. Schließlich wird Ihnen manches selbstverständlich oder banal erscheinen. Denken Sie trotzdem einen Augenblick darüber nach. Nehmen Sie die Vorbereitung ernst und den Vortrag locker!

Wenn Sie sich auf einen Seminarvortrag vorbereiten, muss das auf zweierlei Weise geschehen: inhaltlich und vortragstechnisch. Es leuchtet ein, dass man einen guten Vortrag nur halten kann, wenn man verstanden hat, wovon man spricht. Daher ist eine gute inhaltliche Vorbereitung eine unabdingbare Voraussetzung für jeden Vortrag. Beginnen Sie rechtzeitig mit der Vorbereitung. Zwei Wochen vor dem Vortragstermin ist nicht rechtzeitig!

## Zur inhaltlichen Vorbereitung

**Was ist die Aufgabenstellung des Vortrags?** Vergewissern Sie sich im Gespräch mit dem Dozenten oder dem betreuenden Assistenten, dass Sie die Aufgabenstellung richtig verstehen und sich nicht etwa auf ein falsches Thema oder mit falschen Schwerpunkten vorbereiten. Manchmal kann man sinnvolle Fragen allerdings überhaupt erst stellen, wenn man sich wenigstens ein Stück weit in die Materie eingearbeitet hat. Wichtig ist auch die Frage, wie sich der Vortrag in den Gesamtzusammenhang des Seminars einbettet. Das kann etwa bei der Auswahl

von Beispielen helfen.

**Welche Literatur gibt es zum Vortrag?** Häufig orientiert sich ein ganzes Seminar oder ein einzelner Vortrag an bestimmten Büchern und Texten oder Abschnitten daraus. Versuchen Sie trotzdem, andere Literatur zum Thema zu finden und darin zu lesen, sobald Sie eine Idee haben, worum es geht.

</Seite 87><Seite 88>

**Wie liest man mathematische Texte?** Wenn Sie in Ihrem Studium soweit sind, einen Seminarvortrag zu halten, haben Sie ja schon das eine oder andere Semester studiert und das eine oder andere Buch gelesen und wissen worauf es ankommt: Wenn Sie mathematische Texte lesen, so gibt es zwei Modi, in denen Sie vorgehen können: Aus der Vogelperspektive: Was sind die groben Linien? Was ist der Gegenstand des vorliegenden Textes? Was sind die zentralen Begriffe und Definitionen, was sind die zentralen Aussagen und Sätze? Was sind die groben Beweisstrukturen? Wozu macht man das alles? Aus der Froschperspektive: Wie wird

es im Detail gemacht? Wie funktioniert ein Beweis? Wozu braucht man die Voraussetzungen im Satz? Was passiert, wenn man sie weglässt? Zwischen diesen

Modi müssen Sie häufig hin- und herwechseln. Man muss sich zuerst einen Überblick verschaffen, wo man eigentlich hinwill, sonst beisst man sich im erstbesten technischen Lemma fest und bleibt stecken. Bei der ersten Lektüre kann man alle Beweise überschlagen und sich auf die Aussagen der Sätze konzentrieren. Irgendwann kommt aber der Punkt, wo man auch die Sätze nicht mehr versteht, weil man kein Gefühl für die eingeführten Begriffe entwickelt hat. Dann wird es Zeit, sich auch die Beweise genauer anzuschauen. Hat man mehr technische Details verstanden, sollte man wieder etwas zurücktreten und sich erneut fragen, was der Gesamtzusammenhang ist usw. In angepasster Form gilt das auch für die Art und Weise, wie man sich einzelnen Sätzen oder Beispielen nähert. Wenn Sie mit einem neuen Satz konfrontiert werden, können Sie sich etwa vor, nach oder auch

während des Studiums seines Beweises Fragen der folgenden Art stellen: Was sind einfache Beispiele für den Satz (etwa Spezialfälle)? Was sind einfache Gegenbeispiele, wo bestimmte Voraussetzungen nicht erfüllt sind? Knüpft der Satz, oder der verwendete Begriff oder der Beweis, an bereits bekannte Dinge an? Gibt es ein charakteristisches Beispiel, an dem man alle wesentlichen Phänomene beobachten kann? Arbeiten Sie sich so in Kreisen in die Literatur zu Ihrem Vortrag (und seine Stellung im Seminar) ein.

## Zur schriftlichen Ausarbeitung

Wenn Sie glauben, die Dinge grob verstanden zu haben, machen Sie sich an eine schriftliche Ausarbeitung. Dort sollten alle Dinge stehen, die mit dem Vortrag zu tun haben. Arbeiten Sie alle (!) Details ausführlich schriftlich aus. Das gilt insbesondere für alle Fragen vom Ach-so-ja,-ist-wirklich-trivial!-Typ.Wenn Sie über bestimmte Punkte stolpern, kann es sehr gut sein, dass die gleiche Frage plötzlich im Seminar wieder auftaucht.

Diese schriftliche Ausarbeitung braucht noch nicht sehr viel mit dem späteren Vortrag zu tun zu haben. Manchmal wird man im Vortrag Beweisschritte oder eher langweilige Rechnungen weglassen. Trotzdem sollten Sie gerade die Dinge, die Sie weglassen, umso sorgfältiger vorbereitet haben. Wenn Sie über einen ganz bestimmten Text vortragen sollen, so ist es noch keine Leistung, wenn Sie diesen Text verstehen und dann wörtlich an die Tafel schreiben, womöglich unter Beibehaltung der Numerierung der Lemmata. Lesen Sie den Text unter den folgenden Gesichtspunkten:

Der Autor hat gar nicht recht. Glauben Sie ihm zunächst kein einziges

Argument. Erstens stecken in mathematischen Texten immer wieder Fehler,

selbst in Texten über Dinge, die man für völlig ausgewaschen hält. Zum

anderen ist das ein einfacher psychologischer Trick, sich zum genauen

Arbeiten zu zwingen.

Der Gedankengang lässt sich abkürzen. Manchmal kann man Beweisgänge

Vereinfachen oder drastisch kürzen. Versuchen Sie das. Wenn es Ihnen

gelingt, fragen Sie sich, warum der Autor nicht darauf gekommen ist.

Manchmal liegt das daran, dass Ihre neue Abkürzung schlicht und einfach

falsch ist. Aber wenn Sie dann den Fehler entdecken, werden Sie viel gelernt

haben.

Ein Vortrag ist ein Vortrag und ein Buch ist ein Buch. Ein Text hat ganz andere Möglichkeiten als ein Vortrag und umgekehrt. Eine Beweisgliederung, die für einen Text konzipiert ist, der zum Beispiel zu blättern erlaubt, kann für einen Vortrag, dessen Rahmen durch die Aufnahmekapazität und das Kurzzeitgedächtnis der Hörer abgesteckt ist, völlig ungeeignet sein. Erfinden

</Seite 88><Seite 89>

Sie eine neue. Sprechen Sie nie über Dinge, die Sie nicht verstanden haben. Die Versuchung ist groß. Aber es wird immer jemanden im Publikum geben, der ohne böse Absicht genau an den Stellen eine Frage stellt, wo das Eis dünn ist. Und wenn das vorkommt, geben Sie zu, dass Sie diesen Punkt nicht verstanden haben; es gibt dann vielleicht die Möglichkeit, die Frage im Plenum auszudiskutieren. (Wenn das natürlich häufig vorkommt, wird es wohl daran liegen, dass Sie sich nicht richtig vorbereitet haben.)

In dieser Vorbereitungszeit sollten Sie das Betreuungsangebot der Dozenten und Assistenten wahrnehmen. Natürlich können Sie nicht erwarten, dass Ihnen jedes Epsilon vorgerechnet wird, denn die Vorbereitung gehört wesentlich zu der zu erbringenden Seminarleistung. Andererseits ist es auch nicht sinnvoll, wochenlang allein über einem Problem zu brüten, das vielleicht nur auf einem einfachen Missverständnis beruht. Insbesondere sollten Sie die Themenauswahl und die Rolle im Seminarzusammenhang mit Ihren Betreuern durchsprechen.

## Zum eigentlichen Vortrag

Wenn Sie sich in Ihrem Thema heimisch fühlen, geht die Arbeit am Thema allmählich in die eigentliche Vorbereitung des Vortrags über. Dazu müssen Sie Ihr inzwischen reichhaltiges Wissen zu einem Vortrag verdichten. Nur einen kleinen Teil von dem, was Sie verstanden oder gelernt haben, werden Sie an der Tafel erklären können. Trotzdem müssen Sie immer noch etwas mehr wissen, im Falle von Rückfragen Details nachliefern können, oder ein Beispiel an der Hand haben usw.

Es gibt häufig vorkommende Stereotype:

Der autistische Vortrag. Der Vortragende ist sich nicht bewusst, dass er nicht

allein im Raum ist. Er spricht mehr mit sich und mit der Tafel als mit dem

Publikum, und lässt das Publikum möglichst nicht am Vortrag teilhaben.

Der Ich-weiss-was-Vortrag. Der Vortragende ist hauptsächlich daran

interessiert, dem Publikum zu beweisen, dass er etwas gelernt hat. Er reiht

die Begriffe, Sätze und Beweise wie Perlen aneinander, möglichst in

atemberaubendem Tempo, hindert das Publikum aber an der Einsichtnahme

in die Zusammenhänge, weil er ja dadurch sein Wissensmonopol verlieren

würde.

Der Null-Bock-Vortrag. Der Vortragende hat das Thema nicht verstanden und

sich nicht vorbereitet. Er schindet Zeit, damit er zu den komplizierten Dingen

am Ende nicht mehr kommt. Schlechte Formulierungen und unleserliche

Schrift verhindern jeden möglichen Ansatz zu Zwischenfragen.

Ein guter Vortrag zeichnet sich von Anfang an dadurch aus, dass er sich als Vermittlung des Themas an das Publikum begreift und das Publikum in den Mittelpunkt stellt. Aus diesem Prinzip kann man alle anderen Grundsätze ableiten. Bei der Auswahl des Darzustellenden ist die zur Verfügung stehende Zeit und das Aufnahmevermögen des Publikums zu beachten. Grundsätzlich erscheint immer allen Vortragenden die Zeit zu knapp. Überziehen ist eine Todsünde. Im Zweifel müssen Sie kürzen. Kürzen Sie mit Überlegung! Welche Teile eines Beweises sind wichtig, weil sie gerade den Witz enthalten oder für das Gebiet typische Verfahren einüben, welche Teile sind unwichtig, weil sie in ähnlicher Form schon da waren oder ohne Verständnisverlust weggelassen werden können? Schneller Schreiben oder das schnelle Wechseln von Folien helfen nur dem Vortragenden, aber nicht dem Publikum. Denken Sie stets daran: Es geht nur ums Publikum, nicht um den Vortragenden! Der Vortragende wird danach beurteilt, wie sein Vortrag beim Publikum ankommt. Bedenken Sie beim Vortrag, dass Dinge, die Ihnen trivial erscheinen, nachdem Sie sich einige Wochen damit beschäftigt haben, für das Publikum noch lange nicht trivial sind, auch dann nicht, wenn Sie sie trivial nennen. Nennen Sie niemals Dinge trivial, die es nicht sind, sonst beleidigen Sie das Publikum.

Sprechen Sie zum Publikum. Die Tafel wird Ihnen immer nur die kalte Schulter zeigen. Wenden Sie sich an jeden einzelnen Zuhörer, suchen Sie Augenkontakt. Und reden Sie nicht zum Seminarleiter! Ihr Hauptadressat sind Ihre Kommilitonen. Sprechen Sie laut, ohne zu schreien.

</Seite 89><Seite 90>

Reden Sie deutlich. Sie können Unsicherheiten nicht durch Nuscheln oder leises, schnelles Sprechen verdecken. Im Gegenteil. Überlegen Sie sich Ihr Tafelbild! Informieren Sie sich vor dem Vortrag, welche und wieviele Tafeln Ihnen zur Verfügung stehen. Überlegen Sie sich, wie Sie diese Tafeln einsetzen wollen. Planen Sie genau, welche Dinge Sie anschreiben wollen, und welche Dinge Sie nur mündlich erklären. An der Tafel müssen nicht immer vollständige deutsche Sätze

stehen. Das kann sehr mühsam und umständlich sein. (Die Formulierung ”Wir definieren eine ... als“ innerhalb einer Definition ist vollkommen überflüssig).

Sinnvoll eingesetzte symbolische Notation kann viel schneller wahrgenommen werden. Zuviele Symbole wiederum erschweren die Verständlichkeit. (Ich persönlich verabscheue logische Konnektoren, wie und/oder/nicht und Häufungen von Quantoren). Markieren Sie in Ihrem Manuskript deutlich, was Sie wie anschreiben

wollen.

Wo es sinnvoll ist, setzen Sie Bilder und Skizzen ein. Mit einer guten (!) Skizze können Sie mehr Information an das Publikum weitergeben als mit langen umständlichen Sätzen. Wenn Sie eine Zeichnung anfertigen, so geben Sie sich Mühe damit: Jedes Bild sollte überlegt sein. Wie wählt man die Perspektive? Wo muss man auf der Tafel ansetzen und wieviel Platz braucht man, um die Zeichnung auszuführen? Und zeichnen Sie sauber und exakt. Natürlich setzt die Pflicht zur

mathematischen Exaktheit allzu freier Phantasie Grenzen. Allerdings lohnt es sich meist, diese Grenzen auszuloten. Also Mut zum Bild!

Cartoon ([www.CartoonStock.com](http://www.CartoonStock.com))

*Ein kleines Mädchen und ein Lehrer stehen vor der Tafel, an der eine Aufgabe steht.*

Saying the chalk is defective just doesn’t work anymore Lisa!

Arbeiten Sie an Ihrem Schriftbild. Wenn das auch bei der Handschrift schwierig sein mag, f¨ur schlampig geschriebene Formeln gibt es keine Entschuldigung. Ein „\alpha“

muss von einem ”a“ unterscheidbar sein, ebenso ein ”\zeta“ von einem ”\xi“, und ein

”l“ von einem “e“. Ein „\Sigma“ ist keine Zickzacklinie. Auch an der Tafel gibt es eine Grundlinie, und diese verläuft horizontal, nicht schräg nach oben oder unten. Buchstaben haben Unterlängen oder Oberlängen. Bruchstriche befinden sich auf gleicher Höhe wie Gleichheitszeichen oder Verknüpfungszeichen etc. Eine ausgeschriebene Handschrift ist sicher schöner als kindliche Druckbuchstaben. Wenn Sie aber mit Formeln Schwierigkeiten haben, kann es hilfreich sein, wenn Sie Formeln sozusagen drucken. Denken Sie wieder an unser Grundprinzip: Es ist völlig unwichtig, ob Sie Ihre eigene Schrift lesen können, das ist kein Maßstab: allein das Publikum zählt.

Aus dem, was ich bis jetzt gesagt habe, geht nebenbei hervor, dass ein mathematischer Vortrag an der Tafel stattzufinden hat. Meiner Meinung nach sind Folien nur in wenigen Ausnahmefällen erlaubt, und zwar hauptsächlich zur schnellen Illustration. D. h. Folien sind sehr gut geeignet, um Ergebnisse zusammengefasst darzustellen, Zwischenergebnisse für die spätere Verwendung bereitzustellen, komplexe Bilder oder Graphiken schnell darzubieten. Folien haben den entscheidenden Nachteil, dass sie den Hörer in viel stärkerem Maße als die Tafel zur Passivität verdammen:

Wer Folien benutzt, dunkelt meistens auch den Raum ab, weil man die Folien

sonst nicht lesen kann. Das löst fast automatisch bei den meisten Zuhörern

Schläfrigkeit aus.

</Seite 90><Seite 91>

Das Mitschreiben von Folien ist viel schwieriger als von der Tafel. Das liegt

erstens an den Umstellungsschwierigkeiten des Auges. Und zweitens daran,

dass die Folien fast immer zu voll sind. Man beobachtet häufig als erste

Reaktion des Publikums, dass die Stifte aus der Hand gelegt werden, sobald

Folien aufgelegt werden.

Slogan: Mit Folien kann man informieren, aber nicht argumentieren. Für einen Folienvortrag gelten die folgenden Benimmregeln:

Man verwende nur wenige Folien und lasse jede Folie möglichst lange liegen.

Jede Folie darf nur wenig Text enthalten, und dieser Text muss der Reihe

nach besprochen werden.

Die Schrift auf einer Folie muss noch sorgfältiger sein als an der Tafel. Wenn

man gedruckte Texte einsetzt, achte man auf die verwendeten Schriftarten.

Sans Serifs-Schriften sind besser lesbar als Times-Schriften o.ä. Die

sinnvolle Verwendung von Farben erhöht die Lesbarkeit enorm.

Man darf niemals Teile der Folie abdecken und dann im Laufe des Vortrags

freilegen. Die Papiere, mit denen man abdeckt, liegen nie ganz richtig auf der

Folie, meistens schräg, sie neigen dazu herunterzufallen. Sie schaffen in

jedem Falle Unruhe.

Auf jeder Folie darf nur der Text stehen, der auch im Vortrag gebraucht wird.

Stellen Sie für jeden Vortrag die Folien so, wie Sie sie brauchen, neu her.

Folien sind in der Sprache des Vortrags zu schreiben. Dass man

englischsprachige Folien in einem deutschsprachigen Vortrag einsetzt, ist

eine leider zunehmende Unsitte.

Es ist grob unhöflich, Folien wiederzuverwenden, die ganz anderen Zwecken

gedient haben und denen man das anmerkt, weil sie Informationen enthalten,

die gar nicht gebraucht werden, oder weil sie noch von der letzten Konferenz

stammen und in Englisch geschrieben sind, jetzt aber deutsch vorgelesen

werden. Die Reihe ließe sich fortsetzen.

[Zusatz: Dem vorstehenden Absatz merkt man an, dass dieser Text schon einige Jahre alt ist: Folienvorträge sind insgesamt sehr selten geworden, dafür werden Power Point Präsentationen leider immer häufiger. Selbstverständlich haben Beamerpräsentationen alle dieselben Probleme wie Folienvorträge und zusätzlich weitere: Zum Beispiel ist der Vortragende ganz an das Medium gebunden, kann Fehler nicht mehr korrigieren, was bei Folien noch geht, und kann nicht flexibel auf Zwischenfragen aus dem Publikum reagieren. Grundregel: Beamer-Präsentationen

sind grundsätzlich verboten. Es sei denn, es liegen sehr, sehr gute Gründe vor. Ich kann mir fast keine vorstellen. M.L. Juni 2009]

*(Fußnote 1:* Auf Tagungen können Beamer-Vorträge sinnvoll sein – spätestens dann, wenn der Hörsaal so groß ist, dass man nicht mehr sinnvoll an der Tafel schreiben kann (oder es z.B. gar keine Tafel mehr gibt, wie im Audimax). Für Seminarvorträge während des Studiums sollte man sich auf Tafelvorträge beschränken. I.A. August 2010. *Ende der Fußnote 1)*

Wenn Sie noch nie einen Vortrag gehalten haben, dann sollten Sie sich auf jeden Fall die Mühe machen, Ihren Vortrag vor einem leeren Saal oder nach Möglichkeit vor Freunden zur Probe zu halten. Sie gewinnen dabei zum einen ein Gefühl dafür, wieviel Zeit Sie brauchen. Zum anderen ist es wichtig, seine eigene Stimme zu hören und Sätze überhaupt einmal laut zu formulieren. Vielleicht haben Sie schon die Erfahrung gemacht, dass ein scheinbar sehr einleuchtendes Argument zusammenbricht, sobald man es laut formuliert, unabhängig davon, ob jemand Einwände äußert, oder dass sich umgekehrt ein Problem von selbst löst, sobald man einem anderen gegenüber laut davon spricht, auch wenn der andere nur zuhört oder rein banale Rückfragen stellt. Ein Probevortrag gibt Ihnen auch Sicherheit im Auftreten und nimmt das Lampenfieber. An einen solchen Probevortrag sollte sich immer eine kritische Überarbeitung des Manuskripts anschließen, gegebenenfalls ein erneuter Probevortrag.

Sprechen Sie frei! Das ist eine große Herausforderung und eine schwierige Hürde. Auch viele Dozenten nehmen diese Hürde nie. Natürlich geht das nicht von Anfang an. Aber nehmen Sie sich den freien Vortrag als Ziel vor. Grundvoraussetzung ist natürlich, da Sie inhaltlich gut vorbereitet sind. (Es kann Stellen geben, wo Sie unsicher sind. Wichtig ist, dass Sie diese Unsicherheit

</Seite 91><Seite 92>

eingrenzen knnen und auch nach außen zugeben können, ohne aus der Fassung zu geraten.) Wenn Sie Ihr Manuskript im Zuge der Vorbereitung in ihren verschiedenen Phasen immer wieder neu aufgeschrieben haben (schließlich bemühen Sie sich ja, die optimale Präsentation zu finden), werden Sie mit der Zeit sowieso den halben Vortrag auswendig können. Wohlgemerkt, es kommt nicht darauf an, den Vortrag auswendig zu lernen! Viel wichtiger ist, den Überblick zu behalten, an jeder Stelle des Vortrags sagen zu können, wo man gerade ist und wo es noch hingehen soll. (Daran müssen Sie das Publikum übrigens immer wieder erinnern.) Denken Sie

über die folgende Frage nach: Wie soll denn das völlig unvorbereitete Publikum eigentlich einen Vortrag verstehen, wenn selbst der Vortragende nach langem gründlichen Studium des Themas ein Manuskript braucht? Nichts spricht dagegen, bei langen Rechnungen mit einem Blick auf das Manuskript zu kontrollieren, ob die Tafelrechnung korrekt ist. Auch sorgfältig formulierte Sätze und Propositionen kann man abschreiben. Aber versuchen Sie, in den Beweisen frei zu argumentieren. Benutzen Sie Ihr Manuskript mehr als Erinnerung an die Gliederung. Ein erster

Schritt dazu ist, das Manuskript gelegentlich aus der Hand zu legen. Nichts ist absurder, als einen Beweis geistlos an die Tafel zu schreiben und sich dann davor zu stellen und zu rekonstruieren, warum das Argument überhaupt ein Argument ist. Aller Anfang ist schwer. Wenn Sie sich auch sicherer fühlen, wenn Sie sich an einem Stück Papier festhalten können, legen Sie es gelegentlich und dann immer öfter einfach aus der Hand. Sie werden feststellen: das befreit!

## Zur Nachbereitung

Eigentlich sollte nach dem Vortrag Gelegenheit zur Diskussion sowohl des Inhalts, wie der Durchführung gegeben sein. Häufig bleibt vor lauter Mathematik keine Zeit, über den Vortrag selbst zu sprechen. Manchmal wird der Dozent darauf verzichten, über Fehler im Vortrag öffentlich zu reden. Versuchen Sie in jedem Falle eine Rückmeldung über Vortragsstil, Tafelbild usw. zu bekommen und sprechen Sie Kommilitonen, Dozenten und Assistenten darauf an. Denn nur so können Sie künftige Vorträge verbessern.

Wenn Sie Ihren Vortrag gehalten haben, ist das Seminar noch nicht vorbei. Verfolgen Sie die Vorträge Ihrer Kommilitonen aufmerksam und versuchen Sie, dabei etwas zu lernen. Wenn Sie etwas nicht verstehen, scheuen Sie sich nicht zu fragen. Denken Sie an unsere Hauptregel. Nur sind jetzt die Rollen vertauscht, und Sie sind Teil des Publikums: der Vortrag wird nur für Sie gehalten. Unterdrücken Sie keine Frage aus falsch verstandener Solidarität gegenüber dem Vortragenden. Im Mittelpunkt steht immer die Mathematik, nicht der Scheinerwerb. Nur dann sind Seminarvorträge keine Veranstaltungen, auf deren Ende man gelangweilt und ungeduldig wartet. Es bleibt noch anzumerken, dass Sie sich nicht nur auf die minimale Anzahl von

Seminarvorträgen beschränken sollten, die Ihnen die Prüfungsordnung vorschreibt. Vielmehr hat Ihnen Ihr Vortrag hoffentlich soviel Spaß gemacht hat, dass Sie sich immer wieder erneut der Herausforderung neuer Themen stellen. Viel Erfolg und viel Vergnügen!

</Seite 92><Seite 93>

# Literaturverzeichnis

[Bla] Chr. Blatter, Analysis 1. Springer Verlag, 1974. -- Eines der wenigen Analysis-

Lehrbücher, das die reellen Zahlen sauber über Dedekind’sche Schnitte

behandelt. Aber Vorsicht: in diesem Buch gehört der Schnittpunkt zur

Unterklasse, nicht zur Oberklasse!

[De1] R. Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, Vieweg-Verlag Braunschweig,

1872.-- Erste strenge Konstruktion der reellen Zahlen als sog. ”Schnitte“, die

seitdem Dedekind’sche Schnitte heißen.

[De2] ----, Was sind und was sollen die Zahlen?, Vieweg-Verlag Braunschweig,

1887. Wenn es wegen der altmodischen Notationen nicht so schwer lesbar

wäre, würde ich dieses Büchlein jedem uneingeschränkt zur Lektüre

empfehlen. Es stellt die Grundlagen der Mengenlehre, der natürlichen und

ganzen Zahlen und Abbildungen sehr elegant zusammen.

[Ha77] P. R. Halmos, Wie schreibt man mathematische Texte. Kleine

Naturwissenschaftliche Bibiothek, Band 7. Teuber Verlag, 1977. -- Zum

Zeitpunkt der Bachelor-Arbeit sollte man diesen Text einmal lesen, es lohnt

sich!

[Hof] K.-H. Hofmann, Analysis 1 – An Introduction to Mathematics via Analysis in

English and German. Heldermann Verlag, 2000. -- eine sehr schöne

zweisprachige Einführung in die Analysis mit vielen handgezeichneten

Abbildungen des Autors. Für diese Vorlesung ist das erste Kapitel relevant.

[Ker] A. Kertesz, Einführung in die transfinite Algebra. VEB Deutscher Verlag der

Wissenschaften, Berlin, 1975. -- kleines feines Büchlein, in dem alles zum   
 Auswahlaxiom drin steht.

[Kur] K. Kuratowski, Introduction to set theory and topology. [International Series of

Monographs in Pure and Applied Mathematics. Vol. 101. Oxford (1972). –

immer noch eines der schönsten Bücher über die Grundlagen der

Mathematik. Behandelt im zweiten Teil metrische Räume, wie sie in der   
 Analysis-Vorlesung vorkommen.

[La] E. Landau, Einführung in die Analysis, Akademische Verlagsgesellschaft,

1930. -- Ein Klassiker über die Grundlagen des Zahlaufbaus, streng und klar.

[Ma65] A. I. Markuschewitsch, Komplexe Zahlen und konforme Abbildungen. VEB   
 Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1965. -- Ein hübsches

Büchlein mit noch mehr Erläuterungen und Beispielen! Da nicht in der

Bibliothek vorhanden: kann auf Anfrage bei mir kopiert werden.

[PS] M. Plaue, M. Scherfner, Mathematik für das Bachelorstudium 1. Spektrum

Akademischer Verlag, Heidelberg, 2009. -- kurz und knapp der Minimalstoff

der Grundlagen sowie der Analysis und der linearen Algebra. Geeignet, falls

der Zustand völliger Verlorenheit abgewandt werden soll, deckt aber nicht

den ganzen Stoff ab, sondern nur das Wichtigste.

[So65] I. S. Sominski, Die Methode der vollständigen Induktion. Mathematische

Schülerbücherei, Band 8. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin,

1965. -- Ein hübsches Büchlein mit noch mehr Erläuterungen und Beispielen!

da nicht in der Bibliothek vorhanden: kann auf Anfrage bei mir kopiert

werden.

[Son] Th. Sonar, Einführung in die Analysis. Vieweg, 1999. -- dieses Buch ist

komplementär zu dieser und der Analysis 1-Vorlesung: es behandelt die

Grundprinzipien der Analysis unter besonderer Berücksichtigung der

historischen Entwicklung, ist dabei aber nicht so langatmig wie manche

Bücher zur Mathematik-Geschichte.

[Rud] W. Rudin, Analysis. Oldenbourg Verlag, 2009.

Einige der alten Bücher (etwa [La], [De2]) sind leicht in gescannter Form im Internet zu finden.

</Seite 93><Seite 94>

Seite 94 ist leer.

</Seite 94><Seite 95>

# Namens- und Sachverzeichnis

Äquivalenz 6

Äquivalenzklasse 24

Äquivalenzrelation 22

überabzählbar 70

Abbildung 16

Abzählbarkeit 69

Additionstheorem 63

algebraische Zahl 71

Antisymmetrie 23

Archimedisches Axiom 44

Argument 54

Aussage 6

Auswahlaxiom 18, 20, 70, 76, 92

verallgemeinertes 71

Axiom 92

Bernoulli’sche Ungleichung 48, 65

beschränkt 16

Betrag 43, 52

bijektiv 19

Bild 18

Binomialkoeffizient 74

Binomischer Lehrsatz 75

Bolyai, Janos

Cantor’sches Diagonalverfahren 70

Cantor, Georg 9/10, 73

Cantor-Russel, Satz von 73

Cardano, Girolamo 62

Cauchy-Folge 40

Cauchy-Schwarz-Ungleichung 55

charakteristische Funktion 72

de Morgan’sche Gesetze

für Aussagen 7

für Mengen 12

Dedekind, Richard 40

Definitionsbereich 16

dicht 45

Differenz 11

Diskriminante 62, 80

Drehstreckung 58

Dreiecksungleichung 55

Durchschnitt 11

Einheitswurzeln 54

Einschränkung 17

Existenzquantor 13

Fakultät 73

Fibonacci-Folge 79

Fixpunkt 17, 29

Folge 17

Fraenkel, Abraham Adolf 13

Fünfeck, regelmäßiges 67

Funktion 21

Gödel, Kurt 72

Gauß, Carl Friedrich 34, 63, 93

Gauß-Klammer 46

Geodäte 93

geometrische Summe 56

gleichmäßige Stetigkeit 26

gleichmächtig 68

Graph 16

Höhensatz 50

Hölder-Ungleichung 64

Hermite, Charles 71

Hilberts Hotel 22, 78

Hilbert, David 21

Horner-Schema 84

Ideal 77

identische Abbildung 17

Indexmenge 17

Induktionsbeweis 34, 94

Infimum 23, 43

injektiv 19, 79

Intervallschachtelung 47, 61, 69

Involution 29

Isometrie 59

Kardinalität 69

kartesisches Produkt 11, 29

Kette 75

Körper 38, 51

kommutatives Diagramm 20

Komplement 12

Komposition 19

konkav 64

Kontinuumshypothese 72

Kontraposition 9

konvex 64

Kronecker, Leopold 30

Lindemann (von), Ferdinand 71

</Seite 95><Seite 96>

linear geordnet 75

Linearität 32, 43

Lobatschewksi, Nikolai Iwanowitsch 93

logarithmische Spirale 58

Mächtigkeit 68

maximal 76

Mengensystem 17

Minimalbedingung 76

Minkowski, Herrmann 21

Minkowski-Ungleichung 64

Monotonie 32, 43

Napol\’eon, Satz von 59

Nullschnitt 41

Oberklasse 40

oder (\vee) 6

Ordnungsrelation 22, 32, 41, 76

Parallelenaxiom 92

Partialbruchzerlegung 86, 87

Pascal’sches Dreieck 74, 79

Peano, Giuseppe 31

Polstelle 86

Polynomdivision 85

Postulat 92

Potenzmenge 10, 72

Primfaktorzerlegung 36

Produktabbildung 29

Projektion (auf Komponente) 17

quadratische Gleichung 80

Quantor 13

Quaternionen 94

rationale Funktion 86

Reflexivität 23

Relation 23

Repräsentant 24

Restriktion 17

Satz von

Cantor-Russel 73

Napol\’eon 59

Vieta 62, 81

Schranke 23, 43

Stetigkeit 16, 24

gleichmäßige 26

Supremum 23, 43

surjektiv 19

Symmetrie 23

symmetrische Differenz 28

symmetrische Gruppe 89

Teiler 23

Tensorprodukt 31

total geordnet 75

Transformation, komplexe 58

Transitivität 23

transzendente Zahl 71

Umkehrabbildung 21

und (\wedge) 6

universeller Quantor 13

Unterklasse 40

Urbild 18

Vereinigung 11

vergleichbar 23, 32, 43

Verknüpfung 19

Vieta, Satz von 62, 81

Wahrheitstafel 6

Weber, Heinrich 38

Wertebereich 16

Widerspruchsbeweis 9, 93

Wohlordnung 33, 76

Zahlbereichserweiterung 32

Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre 13, 72

Zinsrechnung 57